Aufgabe 1

Man bezeichne die Menge der an der Tafel stehenden Zahlen mit $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Die Summe aller Elemente einer Menge M werde durch $\sum M$ dargestellt.
Behauptung. Beim Ausführen von Spielzügen ist der 11-er Rest der Summe aller an der Tafel stehenden Zahlen invariant bzw. konstant, d.h.

$$I := \sum_{i=1}^{n} s_i \bmod 11 = \sum S \bmod 11 = \text{const.}$$

Beweis. An der Tafel seien die Zahlen der Menge $S_0 = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Es ist $s_i \in \{0, 1, \ldots, 2004\}$ für alle $0 < i \leq n$, weil zu Beginn des Spiels $S = \{1, 2, \ldots, 2004\}$ gilt und an die Tafel nur neue Zahlen aus der Menge $\{0, 1, \ldots, 10\}$ geschrieben werden[1]. Ein Spielzug kann im Detail wie folgt beschrieben werden.

1. Es wird eine Teilmenge U von S_0 ausgewählt, $U \subseteq S_0$.
2. Die Menge der an der Tafel stehenden Zahlen wird zu

$$S_1 = (S_0 \setminus U) \cup \left\{\sum U \bmod 11\right\}.$$

Die Behauptung kann also ausgedrückt werden durch[2]

$$\begin{aligned}
\sum S_0 \bmod 11 &= \sum S_1 \bmod 11 \\
&= \sum \left((S_0 \setminus U) \cup \left\{\sum U \bmod 11\right\}\right) \bmod 11 \\
&= \left(\sum S_0 - \sum U + \sum U \bmod 11\right) \bmod 11 \\
&= \left(\sum S_0 \bmod 11 - \sum U \bmod 11 \left(\sum U \bmod 11\right) \bmod 11\right) \bmod 11 \quad (*) \\
&= \left(\sum S_0 \bmod 11\right) \bmod 11 \\
&= \sum S_0 \bmod 11
\end{aligned}$$

für beliebige $S_0 = \{s_1, \ldots, s_n\}$, $s_i \in \{0, \ldots, 2004\}$, $U \subseteq S_0$. D.h. die Behauptung gilt für beliebige $S_0 = \{s_1, \ldots, s_n\}$, $s_i \in \{0, \ldots, 2004\}$, $U \subseteq S_0$, d.h. nach jedem Spielzug ist

$$I = \sum S_0 \bmod 11 = \sum S_1 \bmod 11 = \text{const.}$$

Zu Beginn des Spiels ist

$$I = \sum S \bmod 11 = \sum_{i=1}^{2004} i \bmod 11 = \frac{2004 \cdot 2005}{2} \bmod 11 = 2009010 \bmod 11 = 3.$$

[1] $x \bmod 11$ liefert per Def. nur Werte aus $\{0, 1, \ldots, 10\}$.
[2] In Zeile (*) wird die Additionsregel $(a + b) \bmod k = (a \bmod k + b \bmod k) \bmod k$ verwendet, vgl. z.B. http://en.wikipedia.org/wiki/Modulo.

Am Ende des Spiels muss also ebenfalls

$I = (1000+x) \bmod 11 = (1000 \bmod 11 + x \bmod 11) \bmod 11 = (10+x) \bmod 11 = 3$

gelten. Dies impliziert $x \bmod 11 = 4$.

Die nach einem beliebigen Spielzug an die Tafel geschriebene neue Zahl ist aus $\{0, \ldots, 10\}$, d.h. die Zahl 1000 kann nicht in einem Spielzug neu hinzugeschrieben worden sein, sondern musste seit Beginn des Spiels unverändert bleiben. Weil die Anzahl der Zahlen von 2004 am Anfang auf zwei am Ende reduziert wurde, muss zwischen Anfang und Ende des Spiels mind. ein Spielzug stattgefunden haben. D.h. die gesuchte Zahl x ist eine durch einen Spielzug neu hinzugeschriebene Zahl, also $x \in \{0, \ldots, 10\}$. Mit $x \bmod 11 = 4$ muss also $x = 4$ sein.

Alternativlösung.

Die Aufgabe kann alternativ auch ohne Verwendung der Invarianten gelöst werden.

Ein Spielzug weist einer Teilmenge S der an der Tafel stehenden Zahlen genau einen Wert aus der Menge $\{0, 1, \ldots, 10\}$ zu, nämlich den Wert $(\sum s_i) \bmod 11$, wenn s_i die Elemente von S sind. Man kann einen Spielzug also als Abbildung

$$f : S \to \{0, 1, \ldots, 10\}, \quad f : S \to \left(\sum_{i, s_i \in S} s_i \right) \bmod 11,$$

auffassen. Zu Beginn des Spiels stehen 2004 Zahlen $\{1, 2, \ldots, 2004\}$ an der Tafel, am Ende, d.h. nach mehrmaligem Anwenden von f, sind es nur noch zwei Zahlen, 1000 und x. Weil ein Spielzug f nur Werte aus $\{0, 1, \ldots, 10\}$ liefert, ist 1000 keine durch Spielzüge erhaltene Zahl. Also erfolgt die Reduzierung der 2004 Zahlen auf zwei Zahlen durch Anwendung mehrerer Spielzüge auf ausschließlich Zahlen

$$k \in K := \{1, 2, \ldots, 2004\} \setminus \{1000\}.$$

D.h. auf die 2003 Zahlen $k \in K$ werden so lange Spielzüge f angewandt, bis nur noch eine Zahl, x, übrig bleibt. Dann stehen nur noch die beiden gewünschten Zahlen 1000 und x an der Tafel, wobei sicher $x \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ gesagt werden kann.

Die Folge von Spielzügen (f_j), die die Zahlen $k \in K$ auf eine einzige Zahl $x \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ reduziert, kann nun genauer untersucht werden.

Aus der Additionsregel für den Modulo folgt

$$\begin{aligned} f(f(a_1,\dots,a_n), f(b_1,\dots,b_m)) &= f\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \bmod 11,\ \left(\sum_{i=1}^{m} b_i\right) \bmod 11\right) \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \bmod 11 + \left(\sum_{i=1}^{m} b_i\right) \bmod 11\right) \bmod 11 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{m} b_i\right) \bmod 11 \\ &= f(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m). \end{aligned}$$

D.h. die Folge von Spielzügen $f_1, f_2, \dots,$ die die Zahlen $k \in K$ auf eine einzige Zahl $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$ reduziert, liefert exakt dasselbe Ergebnis wie

$$\begin{aligned} f(1, 2, \dots, 999, 1001, 1002, \dots, 2004) &= \left(\sum_{i=1}^{2004} i - 1000\right) \bmod 11 \\ &= \left(\frac{2004 \cdot 2005}{2} - 1000\right) \bmod 11 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Wendet man also solange Spielzüge auf die an der Tafel stehenden Zahlen an, bis neben der 1000 nur noch eine Zahl an der Tafel steht, so muss diese Zahl die 4 sein.

Aufgabe 2

Durch Betrachtung einiger Beispieldreiecke, die die vorgegebenen Eigenschaften besitzen, fällt auf, dass $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b - c)^2$, wenn c die kürzeste Seite im jeweiligen Dreieck ist. Diese Besonderheit führt direkt zur Lösung der Aufgabe.

Zunächst ist klar, dass es in jedem Dreieck eine Seite c mit $c \leq a$ und $c \leq b$ gibt, wenn a und b die beiden anderen Seiten des Dreiecks sind. Aus

$$A = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \tag{2.1}$$

folgen $c : a = h_a : h_c$ und $c : b = h_b : h_c$. Wegen $c \leq a$ und $c \leq b$ ist also $h_c \geq h_a$ und $h_c \geq h_b$, d.h. die Höhe h_c der kürzesten Seite c des Dreiecks ist die Höhe, die gleich der Summe der beiden anderen Höhen ist, also

$$h_c = h_a + h_b. \tag{2.2}$$

Nun kann folgende Behauptung bewiesen werden.

Behauptung. Es gilt $(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2$, falls $a, b, c \in \mathbb{N}$, $c \leq a, c \leq b$ und $h_c = h_a + h_b$ in dem Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c.
Beweis. Allg. gilt

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \ + \ 2(ab - bc - ac). \tag{2.3}$$

Es soll gezeigt werden, dass unter den gegebenen Voraussetzungen $ab - bc - ac = 0$ gilt. Aus (2.1) und (2.2) folgt

$$h_c = 2\frac{A}{c} = h_a + h_b = 2\frac{A}{a} + 2\frac{A}{b},$$

also

$$\begin{aligned} \frac{A}{c} &= \frac{A}{a} + \frac{A}{b} \\ \Leftrightarrow \frac{abA}{abc} &= \frac{bcA + acA}{abc} \\ \Leftrightarrow ab &= bc + ac \\ \Leftrightarrow 0 &= ab - bc - ac. \end{aligned}$$

Gleichung (2.3) wird also zu

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

d.h. die Behauptung ist bewiesen.

Wegen $a, b, c \in \mathbb{N}$ ist $a + b - c \in N$, d.h. $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ist eine Quadratzahl.

Aufgabe 3

Zur Veranschaulichung der Lösung wurden zwei Skizzen von der Zerlegung der Sechsecke und eine Skizze der Zusammensetzung zu einem gleichseitigen Dreieck angefertigt (vgl. Seite 8-8). Die Seitenlänge des regelmäßigen Sechsecks wird im Folgenden mit a bezeichnet.

Damit sich die sechs Teile der beiden regelmäßigen Sechsecke lückenlos und überschneidungsfrei zu einem gleichseitigen Dreieck zusammensetzen lassen, muss die Fläche des zu bauenden gleichseitigen Dreiecks genauso groß sein wie die Fläche der beiden Sechsecke. Die Fläche der beiden Sechsecke erhält man durch Betrachtung des Dreiecks $\triangle LMK$ in Abb. 2, wenn M der Mittelpunkt des Sechsecks ist. Dann halbieren nämlich die Strecken $[MK]$ und $[ML]$ die Innenwinkel des Sechsecks an den Ecken K und L. Ein Innenwinkel im gleichmäßigen Sechseck beträgt $(6-2)\cdot 180° : 6 = 120°$, also $\angle LKM = \angle MLK = 60°$. Folglich ist das Dreieck $\triangle LMK$ gleichseitig, also

$$A(\triangle LMK) = \frac{1}{2}a\sqrt{a^2-(a:2)^2} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}.$$

Die Gesamtsfläche A_{ges} der beiden Sechsecke ist somit

$$A_{ges} = 12\cdot A(\triangle LMK) = 3\sqrt{3}\ a^2.$$

Dies ist gleich der Fläche des zu bauenden gleichseitigen Dreiecks. Mit x als Seitenlänge dieses Dreiecks ergibt sich also

$$A_{ges} = 3\sqrt{3}\ a^2 = \frac{1}{4}x^2\sqrt{3}\ \Rightarrow\ x = 2\sqrt{3}\,a.$$

Man betrachte nun die Strecke $[KG]$ in Abb. 2. Sie ist doppelt so lang als die Höhe des Dreiecks $\triangle LMK$, also

$$\overline{KG} = 2\cdot\sqrt{a^2-(a:2)^2} = \sqrt{3}\ a.$$

Die Seitenlänge x des zu bauenden Dreiecks ist also doppelt so groß als $\overline{KG}$.

Durch systematisches Probieren stößt man rasch auf die in den Abb. 1 und 2 gezeigte Zerlegung der Sechsecke und die in Abb. 3 gezeigte Zusammensetzung des Dreiecks. Es ist klar, dass die Zerlegung aus sechs Teilen besteht. Die drei Seiten des Dreiecks in Abb. 3 sind jeweils aus zwei zu $\overline{KG}$ gleichlangen Strecken zusammengesetzt[1], d.h. alle Seitenlängen des Dreiecks sind wie oben berechnet $x = 2\overline{KG}$, das Dreieck ist also gleichseitig. Nun muss noch gezeigt werden, dass es keine Lücken oder Überdeckungen gibt. Hierzu werden 1. alle aneinanderliegenden Seiten im Dreieck in Abb. 3 auf die Gleichheit ihrer Längen überprüft. 2. werden die Winkel an allen Schnittpunkten innerhalb des Dreiecks in Abb. 3 berechnet und geprüft, ob die Summe aller Winkel an einem Schnittpunkt 360° beträgt. Sind alle

[1] Die untere Seite des Dreiecks ist ist aus zwei Strecken $[KG]$ zusammengesetzt. Die beiden übrigen Seiten des Dreiecks sind aus zwei Strecken $[AE]$ bzw. $[CE]$ zusammengesetzt, wobei $\overline{KG} = \overline{AE} = \overline{CE}$, weil die beiden Sechsecke kongruent sind.

diese Prüfungen korrekt, so gibt es keine Überschneidungen oder Lücken in dem Dreieck.

1. *Seiten.*
   Die Flächen 1 und 4 haben die Strecken $[E_1F_1]$ und $[G_4L_4]$ gemeinsam. Beide Strecken sind Seiten der ursprünglichen Sechsecke, d.h. sie haben beide die gleiche Länge, $\overline{E_1F_1} = \overline{G_4L_4} = a$. Selbiges gilt für alle[2] gemeinsamen Strecken der anderen Flächen,

$$\begin{aligned} a &= \overline{F_1A_1} = \overline{H_6G_6} = \overline{A_2B_2} = \overline{G_6M_6} = \overline{B_2C_2} \\ &= \overline{M_6K_6} = \overline{C_3D_3} = \overline{K_6J_6} = \overline{D_3E_3} = \overline{M_5G_5} \\ &= \overline{M_5K_5} = \overline{J_6I_6} = \overline{K_4L_4} = \overline{I_6H_6}. \end{aligned}$$

   Somit sind alle aneinanderliegenden Seiten gleichlang.

2. *Winkel.*
   Im Folgenden werden die Punkte der Deutlichkeit halber mit den Flächen-Indizes $1, 2, \ldots, 6$ versehen. Zu Dreieck 1 in Abb. 1 sind die Dreiecke 3, 4 und 5 kongruent. Der stumpfe Winkel in jedem dieser Dreiecke ist Innenwinkel im regelmäßigen Sechseck, also $120°$. Wegen der Gleichschenkligkeit der Dreiecke sind die spitzen Winkel $(180° - 120°) : 2 = 30°$ groß. Weil die Teile 2 und 6 achsensymmetrisch zu E_2B_2 bzw. M_6I_6 sind und die Dreiecke 1, 3, 4 und 5 kongruent sind, ist das Dreieck in Abb. 3 achsensymmetrisch zur Gerade E_2I_6. Es werden nun alle Schnittpunkte auf korrekte Winkelsummen überprüft.

   1. $\angle F_1E_1A_1 + \angle K_4G_4L_4 = 60°$.
      Korrekt, weil $\angle F_1E_1A_1 = \angle K_4G_4L_4 = 30°$ (spitze Winkel in Dreiecken 1 und 4).
   2. $\angle A_2E_2C_2 = 60°$.
      Man betrachte Abb. 1. An der Ecke E gilt

      $$\angle FED = 120° = \angle FEA + \angle AEC + \angle CED = 30° + \angle AEC + 30°,$$

      also $\angle AEC = 60°$.
   3. $\angle C_3E_3D_3 + \angle M_5G_5K_5 = 60°$.
      Korrekt wegen 1. und Achsensymmetrie des Dreiecks in Abb. 3 zu E_2I_6.
   4. $\angle E_1A_1F_1 + \angle H_6G_6M_6 + \angle B_2A_2E_2 = 180°$.
      Es gilt
      $\angle E_1A_1F_1 = 30°$ (spitzer Winkel in Dreieck 1)
      $\angle H_6G_6M_6 = 60°$ (vgl. Abb. 2, MG halbiert $\angle HGL = 120°$.)
      $\angle B_2A_2E_2 = 90°$ (vgl. Abb. 1: $\angle BAE = \angle BAF - \angle FAE = 120° - 30° = 90°$.)
      Also $\angle E_1A_1F_1 + \angle H_6G_6M_6 + \angle B_2A_2E_2 = 180°$.

[2] Nur $[G_6M_6]$ und $[M_6K_6]$ sind keine direkten Außenseiten der ursprünglichen Sechsecke. Betrachtet man jedoch in Abb. 2 KG als Symmetrieachse, so ist klar, dass $\overline{G_6M_6} = \overline{M_6K_6} = a$.

5. $\angle D_3C_3E_3 + \angle M_6K_6J_6 + \angle E_2C_2B_2 = 180°$.
   Korrekt wegen 4. und Achsensymmetrie des Dreiecks in Abb. 3 zu E_2I_6.
6. $\angle G_5K_5M_5 + \angle J_6I_6H_6 + \angle L_4K_4G_4 = 180°$.
   Es gilt $\angle G_5K_5M_5 = \angle L_4K_4G_4 = 30°$ (spitze Winkel in Dreiecken 5 und 4) und $\angle J_6I_6H_6 = 120°$ (Innenwinkel im regelmäßigen Sechseck). Also $30° + 120° + 30° = 180°$.
7. $\angle C_2B_2A_2 + \angle G_6M_6K_6 = 360°$.
   Es gilt $\angle C_2B_2A_2 = 120°$ (Innenwinkel im regelmäßigen Sechseck). Man betrachte den Punkt M in Abb. 2. Wegen $\angle KMG = 120°$ gilt $\angle G_6M_6K_6 = 360° - \angle KMG = 240°$. Also $\angle C_2B_2A_2 + \angle G_6M_6K_6 = 120° + 240° = 360°$.
8. $\angle G_4L_4K_4 + \angle I_6H_6G_6 + \angle A_1F_1E_1 = 360°$.
   Es gilt $\angle G_4L_4K_4 = \angle A_1F_1E_1 = 120°$ (stumpfer Winkel in den Dreiecken 4 und 1) und $\angle I_6H_6G_6 = 120°$ (Innenwinkel im regelmäßigen Sechseck). Also $\angle G_4L_4K_4 + \angle I_6H_6G_6 + \angle A_1F_1E_1 = 3 \cdot 120° = 360°$.
9. $\angle K_5M_5G_5 + \angle K_6J_6I_6 + \angle E_3D_3C_3 = 360°$.
   Folgt aus 8. wegen der Achsensymmetrie des Dreiecks in Abb. 3 zu E_2I_6.

Das Dreieck in Abb. 3 hat also alle Prüfungen auf korrekte Seitenlängen und Winkelsummen bestanden, d.h. es gibt keine Lücken oder Überlappungen.

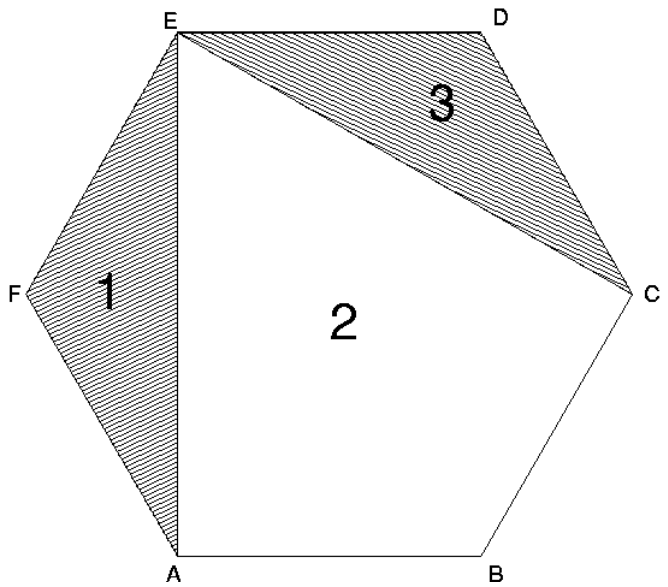

Abb. 1 Die Aufteilung des einen Sechsecks...

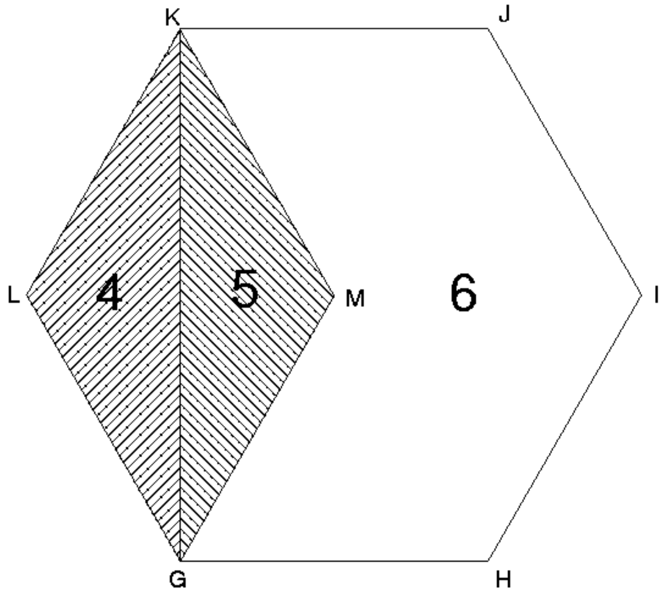

Abb. 2 . . . Die Aufteilung des anderen Sechsecks.

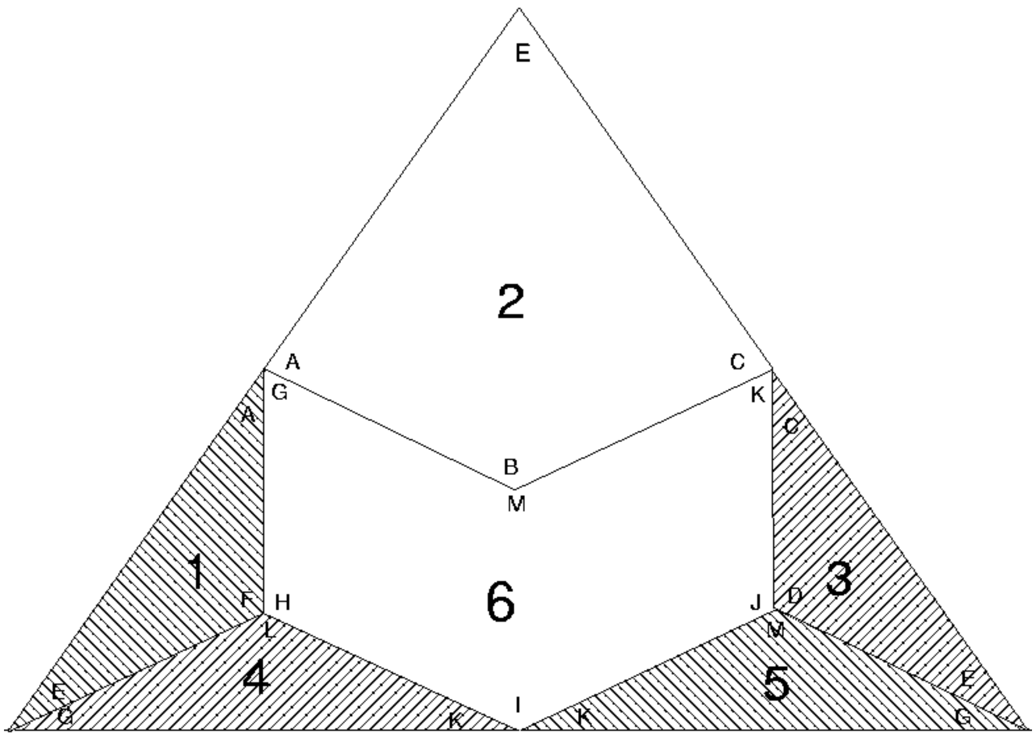

Abb. 3 Die Zusammensetzung zu einem gleichseitigen Dreieck.

Aufgabe 4

Man bezeichne die Seitenlänge des zu zerlegenden Würfels mit a. Die Seitenlängen der n Quader, in die der Würfel zerlegt wird, werden p_i, q_i, r_i, $i = 1..n$ genannt. Weil die Quader eine Zerlegung des Würfels bilden muss die Summe der Volumina der Quader gleich dem Volumen des Würfels sein, d.h.

$$a^3 = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i r_i. \tag{4.1}$$

Die zweite Bedingung sagt aus, dass die Summe der Volumina der Umkugeln der Quader der Zerlegung gleich dem Volumen der Umkugel des Würfels ist. Der Radius der Umkugel eines Quaders ist halb so lang wie die Raumdiagonale dieses Quaders, d.h.

$$R = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} : 2.$$

Das Volumen der Umkugel eines Quaders ist dann

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi}{6}\left(p^2 + q^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Die zweite Bedingung lautet also

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6}\left(3a^2\right)^{\frac{3}{2}} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{6}\left(p_i^2 + q_i^2 + r_i^2\right)^{\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow \quad 3^{\frac{3}{2}} \cdot a^3 &= \sum_{i=1}^{n} \left(p_i^2 + q_i^2 + r_i^2\right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Behauptung. Angenommen Bedingung (4.1) gilt. Dann gilt Bedingung (4.2) genau dann, wenn alle Quader der Zerlegung Würfel sind, d.h. $p_i = q_i = r_i \; \forall \, 0 < i \leq n$.

Beweis. Der Beweis erfolgt in mehreren Teilen.

1. *Behauptung.* Jedes Zahlentripel $p, q, r > 0$ hat eine Darstellung[1]

$$p = kw, \; q = lw, \; r = \frac{1}{kl}w. \tag{4.3}$$

Beweis. Die Darstellung (4.3) ist ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten l, k, w, d.h. l, k und w können

[1] Die Darstellung mag auf den ersten Blick etwas willkürlich wirken. Man kann sie sich jedoch als eine Art „Streckung“ von Würfeln vorstellen, die jeden Quader eines bestimmten Volumens erzeugen können. D.h. jeder beliebige Quader lässt sich unter Erhaltung des Volumens in einen Würfel überführen.

für $p, q, r \neq 0$ eindeutig bestimmt werden.[2]

2. Mit der Darstellung (4.3) wird Bedingung (4.2) zu

$$\begin{aligned} 3^{\frac{3}{2}} \cdot a^3 &= \sum_{i=1}^{n} \left(p_i^2 + q_i^2 + r_i^2\right)^{\frac{3}{2}} && (4.2) \\ \Leftrightarrow\ 3^{\frac{3}{2}} \cdot a^3 &= \sum_{i=1}^{n} \left((k_i w_i)^2 + (l_i w_i)^2 + \left(\frac{w_i}{k_i l_i}\right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow\ 3^{\frac{3}{2}} \cdot a^3 &= \sum_{i=1}^{n} w_i^3 \left(k_i^2 + l_i^2 + \frac{1}{k_i^2 l_i^2}\right)^{\frac{3}{2}}. && (4.2b) \end{aligned}$$

3. Die Behauptung setzt voraus, dass Bedingung (4.1) gilt. Dadurch wird (4.2b) zu

$$\begin{aligned} (4.2b)\ \Leftrightarrow\ 3^{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i q_i r_i &= \sum_{i=1}^{n} w_i^3 \left(k_i^2 + l_i^2 + \frac{1}{k_i^2 l_i^2}\right)^{\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow\ 3^{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{i=1}^{n} w_i^3 &= \sum_{i=1}^{n} w_i^3 \left(k_i^2 + l_i^2 + \frac{1}{k_i^2 l_i^2}\right)^{\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow\ \sum_{i=1}^{n} w_i^3 \cdot 3^{\frac{3}{2}} &= \sum_{i=1}^{n} w_i^3 \cdot \left(\underbrace{k_i^2 + l_i^2 + \frac{1}{k_i^2 l_i^2}}_{T_i}\right)^{\frac{3}{2}}. && (4.2c) \end{aligned}$$

4. *Behauptung.* In (4.2c) gilt $T_i \geq 3$ für alle $k_i, l_i > 0$, wobei $T_i = 3$ genau dann, wenn $k_i = l_i = 1$.
   Beweis. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung sagt aus, dass das arithmetische Mittel positiver Zahlen x_i größer-gleich dem geometrischen Mittel dieser Zahlen x_i ist, wobei die Gleichheit genau dann vorliegt, wenn alle Zahlen x_i gleich sind.[3] Folglich gilt für alle $k_i, l_i > 0$ die

[2] Man vermutet $w = \sqrt[3]{pqr}$. Dann wären $k = \frac{p}{w} = \sqrt[3]{\frac{p^2}{qr}}$ und $l = \frac{q}{w} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{pr}}$, also

$$p = kw = \sqrt[3]{\frac{p^2}{qr} \cdot pqr} = p, \quad q = lw = \sqrt[3]{\frac{q^2}{pr} \cdot pqr} = q, \quad r = \frac{w}{kl} = \sqrt[3]{\frac{pqr \cdot qr \cdot pr}{p^2 q^2}} = r.$$

Die Vermutung war also richtig. Wegen $p, q, r > 0$ folgt aus $w = \sqrt[3]{pqr}, k = \sqrt[3]{\frac{p^2}{qr}}, l = \sqrt[3]{\frac{q^2}{pr}}$ auch $k, l, w > 0$.

[3] Vgl. z.B. http://www-math.uni-paderborn.de/~orlob/Mittelwerte.pdf oder http://planetmath.org/GeneralMeansInequality.html und http://planetmath.org/encyclopedia/ProofOfArithmeticGeometricHarmonicMeansInequality.html.

Ungleichung

$$
\begin{aligned}
\left(k_i^2 + l_i^2 + \frac{1}{k_i^2 l_i^2}\right) : 3 &\geq \sqrt[3]{k_i^2 \cdot l_i^2 \cdot \frac{1}{k_i^2 l_i^2}} \\
\Leftrightarrow \quad \left(k_i^2 + l_i^2 + \frac{1}{k_i^2 l_i^2}\right) : 3 &\geq 1 \\
\Leftrightarrow \quad T_i = k_i^2 + l_i^2 + \frac{1}{k_i^2 l_i^2} &\geq 3, \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

wobei die Gleichheit

$$T_i = k_i^2 + l_i^2 + \frac{1}{k_i^2 l_i^2} = 3 \qquad (4.5)$$

genau dann vorliegt, wenn

$$k_i^2 = l_i^2 = \frac{1}{k_i^2 l_i^2}. \qquad (4.6)$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt unmittelbar, dass im Fall von $T_i = 3$ $k_i^2 = l_i^2 = \frac{1}{k_i^2 l_i^2} = \frac{3}{3} = 1$, d.h. $k_i = l_i = 1$ wegen $k_i, l_i > 0$ [4] gelten muss.

In (4.2c) unterscheidet sich die rechte Seite von der linken nur durch den Term T_i anstelle der 3 innerhalb der Summe über alle i. D.h. der i-te Summand auf der rechten Seite ist größer-gleich dem i-ten Summanden auf der linken Seite für alle $0 < i \leq n$. Also gilt (4.2c) genau dann, wenn alle Summanden links und rechts gleich sind, d.h. $T_i = 3 \ \forall\ 0 < i \leq n$. Wie oben gezeigt wurde, gilt $T_i = 3$ genau dann, wenn $k_i = l_i = 1$, d.h. (4.2c) gilt genau dann, wenn $k_i = l_i = 1 \ \forall\ 0 < i \leq n$. Erinnert man sich an die Darstellung von p, q, r durch k, l, w in Schritt 1, so sieht man, dass für $k_i = l_i = 1 \ \forall\ 0 < i \leq n$ die Seitenlänge p_i, q_i, r_i der Zerlegung zu $p_i = q_i = r_i = w_i \ \forall\ 0 < i \leq n$ wird.

Unter Voraussetzung von Bedingung (4.1) gilt also die zu Bedingung (4.2) äquivalente Bedingung (4.2c) genau dann, wenn alle Quader Würfel sind. Q.e.d.

[4] $k, l > 0$ wurde in der Fußnote zur Darstellung von p, q, r durch k, l, w gezeigt.