Aufgabe 1

Voraussetzung. Im Zentrum eines 2005 x 2005-Schachbretts liegt ein Spielwürfel, der in einer Folge von Zügen über das Brett bewegt werden soll. Ein Zug besteht dabei aus folgenden drei Schritten:

- Man dreht den Würfel mit einer beliebigen Seite nach oben,
- dann den Würfel um die angezeigte Augenzahl nach rechts oder um die angezeigte Augenzahl nach links und
- schiebt anschließend den Würfel um die verdeckt liegende Augenzahl nach oben oder um die verdeckt liegende Augenzahl nach unten.

Das erreichte Feld ist das Ausgangsfeld für den nächsten Zug.
Behauptung. Alle Felder sind durch eine endliche Folge an gültigen Zügen erreichbar.
Beweis.

Definition 1.1 *Das* 2005×2005-*Schachbrett wird durch*

$$S := \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -1002 \leq x,y \leq 1002\}$$

dargestellt, wobei $(0,0)$ *für das Zentrum steht,* x *für die Horizontal- und* y *für die Vertikalkoordinate.*

Definition 1.2 *Ein (gültiger oder ungültiger)* Zug *ist definiert durch*

$$Z_a^b: S \to S,\ (x,y) \to (x,y) + (a,b) = (x+a, y+b), \quad a,b \in \mathbb{Z}, (x+a,y+b) \in S.$$

Definition 1.3 *Ein Zug* Z_a^b *wird genau dann* gültig *genannt, wenn* $a,b \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 6\}$ *und* $|a| + |b| = 7$ *gilt.*[1]

Definition 1.4 *Ein Feld* $(x,y) \in S$ *ist genau dann* erreichbar, *wenn eine endliche Folge bzw. Komposition gültiger Züge* $(Z_{a_i}^{b_i})^n$ *so existiert, dass* $(Z_{a_i}^{b_i})^n \circ (0,0) = (x,y)$ *gilt.*

Hilfssatz 1.1 *Wenn alle Felder im Quadrant* $S_I = \{(x,y) \in S \mid x,y > 0\}$ *und das Zentrum* $(0,0)$ *erreichbar sind, dann sind alle Felder in* S *erreichbar.*

Beweis. (Durch Symmetrie.) Man betrachte $(x,y) \in S_I$. Die endliche Folge gültiger Züge, die von $(0,0)$ zu (x,y) führt, sei $(Z_{a_i}^{b_i})^n$. Das zum Feld (x,y) im II. Quadrant korrespondierende Feld $(-x,y)$ erreicht man dann durch die Folge gültiger Züge $(Z_{-a_i}^{b_i})^n$. Die zu (x,y) korrespondierenden Felder $(-x,-y)$ bzw. $(x,-y)$ im III. bzw. IV. Quadrant erreicht man analog durch die Folge gültiger Züge $(Z_{-a_i}^{-b_i})^n$ bzw. $(Z_{a_i}^{-b_i})^n$. Es sind also alle Felder der vier Quadranten von S erreichbar. Da laut Voraussetzung das Feld $(0,0)$ erreichbar ist, sind also alle Felder von S erreichbar.

Hilfssatz 1.2 *Die Züge* Z_1^0 *und* Z_0^1 *sind jeweils endliche Folgen gültiger Züge* $(Z_{a_i}^{b_i})^n$.

[1] Die Summe zweier gegenüberliegender Augenzahlen eines Würfels ergibt 7.

Beweis. Es gilt

$$
\begin{aligned}
Z_1^0 &= Z_5^2 \circ \overbrace{Z_{-3}^4 \circ Z_{-1}^{-6}}^{Z_{-4}^{-2}} &(1.1)\\
Z_0^1 &= Z_2^5 \circ \underbrace{Z_4^{-3} \circ Z_{-6}^{-1}}_{Z_{-2}^{-4}}. &(1.2)
\end{aligned}
$$

Hilfssatz 1.3 *Alle Felder in S_I sind von $(0,0)$ aus durch eine endliche Folge gültiger Züge erreichbar, d.h. für alle $(x,y) \in S_I$ existiert $(Z_{a_i}^{b_i})^n$, sodass $(Z_{a_i}^{b_i})^n \circ (0,0) = (x,y)$. Dabei liegen die Felder nach jeder Zwischenfolge innerhalb des Schachbretts S, d.h. $(Z_{a_i}^{b_i})^k \circ (0,0) \in S$ für alle $0 < k \in \mathbb{N} \leq n$.*

Beweis. Sei $(x,y) \in S_I$. Man erreicht (x,y), indem man von $(0,0)$ ausgehend zunächst $|x|$ Mal die endliche Folge gültiger Züge $Z^0_{\operatorname{sign} x}$ und anschließend $|y|$ Mal die endliche Folge gültiger Züge $Z_0^{\operatorname{sign} y}$ ausführt.[2] Formal heißt das

$$(x,y) = (Z_1^0)^{|x|} \circ (Z_0^1)^{|y|} \circ (0,0). \tag{1.3}$$

Da die Verschiebung nach jedem Zug Z_1^0 bzw. Z_0^1 in (1.3) stets nach rechts oder oben verläuft, Z_1^0 bzw. Z_0^1 nach (1.1) bzw. (1.2) eine maximale Verschiebung um 6 Felder nach links bzw. unten benötigen und der linke bzw. untere Rand bei $x = -1002$ bzw. $y = -1002$ liegen, können der linke oder der untere Rand durch (1.3) nicht überschritten werden. Der erste Zug für jeden Zug Z_1^0 bzw. Z_0^1 in (1.1) bzw. (1.2) ist Z_{-1}^{-6} bzw. Z_{-6}^{-1}, d.h. ausgehend von einem $(x,y) \in S$ können durch diese ersten Teilzüge weder der rechte, noch der obere Rand des Schachbretts verlassen werden. Die ersten beiden Teilzüge von Z_1^0 bzw. Z_0^1 entsprechen Z_{-4}^{-2} bzw. Z_{-2}^{-4}, d.h. auch diese Züge können den rechten oder den oberen Rand nicht überschreiten. Mit dem dritten Teilzug kommt man schließlich auf Z_1^0 bzw. Z_0^1, d.h. man bewegt sich um genau ein Feld nach rechts bzw. oben zum „Zielfeld" (x,y), das aber Element von S_I ist. Folglich sind alle Felder von S_I ohne Verlassen von S erreichbar.

Satz 1.1 *Alle Felder $(x,y) \in S$ sind erreichbar.*

Beweis. Ist $(x,y) = (0,0)$, so ist $(0,0)$ zum Beispiel durch $(0,0) = Z_6^1(Z_{-6}^{-1}((0,0)))$ erreichbar. Also folgt aus den Hilfssätzen 1.3 und 1.1, dass alle Felder $(x,y) \in S$ erreichbar sind, q.e.d.

[2] Obwohl wegen $(x,y) \in S_I$ $x,y > 0$ gilt, werden hier Betrag und Signum-Funktion verwendet, um die Korrespondenz zu den symmetrischen Quadranten II bis IV zu verdeutlichen.

Aufgabe 2

Voraussetzung. Die ganze Zahl a habe die Eigenschaft, dass $3a$ in der Form $3a = x^2 + 2y^2$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ darstellbar ist.
Behauptung. a ist ebenfalls in dieser Form darstellbar.
Beweis. Sei $a \in \mathbb{Z}$ gesetzt. Gesucht sind nun $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $p^2 + 2q^2 = a$.
Laut Voraussetzung gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $3a = x^2 + 2y^2$. Umformung ergibt:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{x^2+2y^2}{3} = \frac{1}{9}\left(3\cdot(x^2+2y^2)\right) = \frac{1}{9}\left(3x^2+6y^2\right) \\
&= \frac{1}{9}\left[x^2 \pm 2\cdot x\cdot 2y + (2y)^2 \ + \ 2\cdot(x^2 \mp 2\cdot x\cdot y + y^2)\right] \\
&= \frac{1}{9}\left[(x\pm 2y)^2 + 2(x\mp y)^2\right] \\
&= \left(\frac{x\pm 2y}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x\mp y}{3}\right)^2.
\end{aligned}$$

Hilfssatz 2.1 *Sei $3a = x^2 + 2y^2$ mit $a, x, y \in \mathbb{Z}$. Aus $x \equiv y \bmod 3$ folgt, dass $\frac{x+2y}{3}$ und $\frac{x-y}{3}$ ganzzahlig sind. Aus $x \not\equiv y \bmod 3$ folgt, dass $\frac{x-2y}{3}$ und $\frac{x+y}{3}$ ganzzahlig sind.*

Beweis. Wegen $3a = x^2 + 2y^2$ ist $x^2 + 2y^2 \equiv 0 \bmod 3$. Es sind $x, y \in \{0, 1, 2 \bmod 3\}$. Die Tabelle zeigt alle Kombinationen:

x mod 3	0 1 2	0 1 2	0 1 2
y mod 3	0 0 0	1 1 1	2 2 2
$(x^2+2y^2) \bmod 3$	0 1 1	2 0 0	2 0 0

Damit $x^2 + 2y^2 \equiv 0 \bmod 3$ gilt, muss also 1. $x \equiv y \bmod 3$ oder 2. $x \equiv 1 \bmod 3, y \equiv 2 \bmod 3$ oder 3. $x \equiv 2 \bmod 3, y \equiv 1 \bmod 3$ sein. In Fall 1. ist $x + 2y \equiv x - y \equiv 0 \bmod 3$. In den Fällen 2. und 3. sind $x - 2y \equiv x + y \equiv 0 \bmod 3$. Folglich ist $\frac{x+2y}{3}$ und $\frac{x-y}{3}$ falls $x \equiv y \bmod 3$ bzw. $\frac{x-2y}{3}$ und $\frac{x+y}{3}$ falls $x \not\equiv y \bmod 3$ ganzzahlig.

Wenn $x \equiv y \bmod 3$, so setze man

$$p_1 = \frac{x+2y}{3}, q_1 = \frac{x-y}{3},$$

falls $x \not\equiv y \bmod 3$ setze man

$$p_2 = \frac{x-2y}{3}, q_2 = \frac{x+y}{3}.$$

Nach Hilfssatz 2.1 sind dann $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}$ oder $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}$. Die Darstellung für a ist dann

$$a = p_1^2 + 2q_1^2 \quad \text{oder} \quad a = p_2^2 + 2q_2^2,$$

q.e.d.

Aufgabe 3

Voraussetzung. Den Seiten a, b, c eines Dreiecks liegen die Winkel α, β, γ gegenüber.
Behauptung. Aus $3\alpha + 2\beta = 180^\circ$ folgt $a^2 + bc = c^2$.
Beweis. (elementargeometrisch).

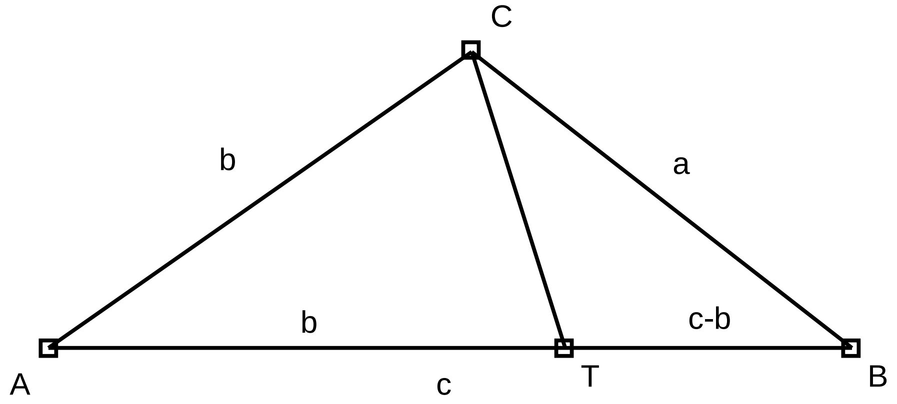

Abbildung 3.1: Skizze zu Aufgabe 3

Die Eckpunkte des Dreiecks mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ werden mit A, B, C bezeichnet.
Zunächst folgt aus $3\alpha + 2\beta = 180^\circ$

$$\beta = (180^\circ - 3\alpha)/2 = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha.$$

Mit Innenwinkelsumme im Dreieck ABC $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ gilt

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - \alpha - \beta \\ &= 180^\circ - \alpha - 90^\circ + \frac{3}{2}\alpha \\ &= 90^\circ + \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Der Punkt T liege auf der Geraden AB mit dem Abstand $\overline{AT} = b$ vom Punkt A (vgl. Skizze). Dann ist das Dreieck ATC gleichschenklig mit den Schenkeln $[AT]$ und $[AC]$. Also gilt im Dreieck ATC wegen Innenwinkelsumme $\angle CTA = \angle ACT = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Somit folgt $\angle BTC = 180^\circ - \angle CTA = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Im Dreieck BCT gilt wegen Innenwinkelsumme $\angle ACB = 180^\circ - \angle BTC - \beta = \alpha$.

Die Dreiecke BCT und ABC sind ähnlich, da ihre Innenwinkel übereinstimmen:

$$\begin{aligned} \alpha &= \angle TCB \\ \beta &= \angle CBT \quad (= 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha) \\ \gamma &= \angle BTC \quad (= 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha) \end{aligned}$$

Wegen $\overline{AT} = b$ ist $\overline{TB} = c - b$. Aus dem gleichen Verhältnis zweier Seiten in ähnlichen Dreiecken folgt

$$\begin{aligned} \frac{\overline{TB}}{\overline{BC}} &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{c-b}{a} &= \frac{a}{c} \\ \Rightarrow \quad c(c-b) &= a^2 \\ \Rightarrow \quad c^2 &= a^2 + bc, \quad q.e.d. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Behauptung. Für alle positiven ganzen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ kann man die n Zahlen $1,2,3,\dots,n$ so in einer Reihe anordnen, dass für je zwei beliebige Zahlen der Reihe ihr arithmetisches Mittel nicht zwischen ihnen steht.
Beweis. Für den Beweis ist zunächst folgende Definition für eine sortierte Reihe sinnvoll.

Definition 4.1 *Sei $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \mathbb{N}_n = \{1,2,3,\dots,n\}$. Wenn eine Abzählung*[1] $f_n : \mathbb{N}_n \to M_n$ *so existiert, dass für beliebige $a,b \in \mathbb{N}_n, a < b$ kein $a < s \in \mathbb{N}_n < b$ existiert mit $f_n(s) = \frac{1}{2}\left(f_n(a) + f_n(b)\right)$, dann wird diese Abzählung* sortiert *genannt.*

Die Behauptung besagt nun, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ eine sortierte Abzählung f_n existiert. Für $n = 1$ ist die Behauptung klar, da das Bild von f_1 nur die 1 enthält. Für $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ wird die Behauptung zunächst durch vollständige Induktion gezeigt, anschließend wird auf alle $n \in \mathbb{N}$ geschlossen.

Hilfssatz 4.1 *Für alle $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$ existiert eine sortierte Abzählung f_n.*

Beweis. (durch vollständige Induktion über k).

- *Induktionsanfang:* $n = 2$. Wenn $f_2(1) = 1$ und $f_2(2) = 2$ gesetzt wird, ist f_2 sortiert.
- *Induktionsschritt: Behauptung.* Wenn für $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$ eine sortierte Abzählung $f_{2^k} = f_n$ existiert, dann existiert auch eine sortierte Abzählung $f_{2^{k+1}} = f_{2n}$.
  Beweis. Sei f_n eine sortierte Abzählung (Induktionsvoraussetzung). Man setze dann $f_{2n} : \mathbb{N}_{2n} \to M_{2n}$,

$$f_{2n}(x) = \begin{cases} 2f_n(x), & 1 \le x \le n \\ 2f_n(x-n) - 1, & n < x \le 2n. \end{cases} \tag{4.1}$$

  Es soll gezeigt werden, dass f_{2n} eine sortierte Abzählung ist. f_{2n} ist eine bijektive Abbildung $f_{2n} : \mathbb{N}_{2n} \to M_{2n}$ (also eine Abzählung), denn f_{2n} ordnet jedem $x \in \mathbb{N}_{2n}$ genau ein $f_{2n}(x)$ zu.[2] Seien nun $a,b \in \mathbb{N}_{2n}$ mit $a < b$. Es soll gezeigt werden, dass f_{2n} sortiert ist, d.h. dass kein $a < s \in \mathbb{N}_n < b$ existiert mit $f_{2n}(s) = \frac{1}{2}\left(f_{2n}(a) + f_{2n}(b)\right)$. Dazu werden drei Fälle von a,b unterschieden.

  - $a \le n$ und $n < b \le 2n$:
    $f_{2n}(a)$ ist nach Definition gerade und $f_{2n}(b)$ ungerade. Demnach ist aber für alle $a < s < b$ $\frac{1}{2}\left(f_{2n}(a) + f_{2n}(b)\right) \notin \mathbb{N}$, d.h. insbesondere $f_{2n}(s) \neq \frac{1}{2}\left(f_{2n}(a) + f_{2n}(b)\right)$ für alle $a < s < b$.
  - $1 \le a,b \le n$:
    Es gilt $f_{2n}(a) = 2f_n(a)$ und $f_{2n}(b) = 2f_n(b)$, also

$$\frac{1}{2}\left(f_{2n}(a) + f_{2n}(b)\right) = f_n(a) + f_n(b).$$

[1] Definition *Abzählung*: Sei M_n eine $n-$Menge, $\mathbb{N}_n = \{1,\dots,n\}$, so nennt man eine bijektive Abbildung $f_n : \mathbb{N}_n \to M_n$ eine *Abzählung*.

[2] $\{2f_n(x) \mid x = 1,2,\dots,n\} = \{2,4,6,\dots,2n\}$ und $\{2f_n(x) - 1 \mid x = 1,2,\dots,n\} = \{1,3,5,\dots,2n-1\}$, da das Bild der bijektiven Abbildung f_n gleich $M_n = \{1,2,\dots,n\}$ ist.

Da f_n eine sortierte Abzählung ist, haben alle $f_n(s)$ mit $a < s < b$ die Eigenschaft $f_n(s) \neq \frac{1}{2}\left(f_n(a) + f_n(b)\right)$. Also haben alle $f_{2n}(s) = 2f_n(s)$ mit $a < s < b$ die Eigenschaft

$$f_{2n}(s) = 2f_n(s) \neq 2 \cdot \frac{1}{2}\left(f_n(a) + f_n(b)\right) = f_n(a) + f_n(b).$$

Folglich gilt für alle $a < s < b$

$$f_{2n}(s) \neq f_n(a) + f_n(b) = \frac{1}{2}\left(f_{2n}(a) + f_{2n}(b)\right).$$

– $n < a, b \leq 2n$:
Es gilt $f_{2n}(a) = 2f_n(a-n) - 1$ und $f_{2n}(b) = 2f_n(b-n) - 1$, also

$$\frac{1}{2}\left(f_{2n}(a) + f_{2n}(b)\right) = f_n(a-n) + f_n(b-n) - 1.$$

Da f_n eine sortierte Abzählung ist, haben alle $f_n(s-n)$ mit $a < s < b$ die Eigenschaft $f_n(s-n) \neq \frac{1}{2}\left(f_n(a-n) + f_n(b-n)\right)$. Also haben alle $f_{2n}(s) = 2f_n(s-n) - 1$ mit $a < s < b$ die Eigenschaft

$$f_{2n}(s) = 2 \cdot f_n(s-n) - 1 \neq 2 \cdot \frac{1}{2}\left(f_n(a-n) + f_n(b-n)\right) - 1 = f_n(a-n) + f_n(b-n) - 1.$$

Folglich gilt für alle $a < s < b$

$$f_{2n}(s) \neq f_n(a-n) + f_n(b-n) - 1 = \frac{1}{2}\left(f_{2n}(a) + f_{2n}(b)\right).$$

Somit gilt bei beliebigen $a, b \in \mathbb{N}_{2n}$ mit $a < b$ für alle $a < s < b$ die Ungleichung

$$f_{2n}(s) \neq \frac{1}{2}\left(f_{2n}(a) + f_{2n}(b)\right).$$

Die Abzählung f_{2n} ist also sortiert, d.h. der Induktionsschritt ist bewiesen.

Da der Induktionsanfang für $n = 2$ gilt und der Induktionsschritt von n auf $2n$ ebenfalls gezeigt wurde, gibt es für alle $n = 2^k$ eine sortierte Abzählung f_n.

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass auch für alle n, die sich nicht als 2^k darstellen lassen, eine sortierte Abzählung existiert. An einem kurzen Beispiel sieht man dies leicht ein, sei z.B. $n = 6$. Dann gibt es nach Hilfssatz 4.1 für $n = 2^3 = 8$ eine sortierte Abzählung bzw. Reihe, z.B. $2, 6, 8, 4, 1, 5, 3, 7$. Diese Reihe wird für $n = 6$ zu $2, 6, 4, 1, 5, 3$ „transformiert“, d.h. die Zahlen 7 und 8 werden gestrichen und die Reihenfolge der Restzahlen bleibt erhalten; diese Reihe für $n = 6$ ist also wie die Reihe für $n = 8$ sortiert. Formal lässt sich dies wie folgt formulieren:

Hilfssatz 4.2 *Wenn sortierte Abzählungen f_n für alle $n \in \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ existieren, dann existieren sortierte Abzählungen f_n für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Für $n = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ wurde bereits gezeigt, dass es sortierte Abzählungen f_n gibt. Sei also n eine natürliche Zahl, die sich nicht in der Form $n = 2^k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ darstellen lässt. Dann sei 2^j die kleinste Zweierpotenz für die $n < 2^j$ gilt. Für 2^j gibt es wie oben gezeigt eine sortierte Abzählung f_{2^j}. Diese Abzählung kann so zu einer Abzählung f_n „transformiert“ werden, dass f_n ebenfalls sortiert ist. Hierzu muss das Bild von f_{2^j} von M_{2^j} auf $M_n \subset M_{2^j}$ eingeschränkt werden, indem anschaulich gesprochen alle $f_{2^j}(x) \notin M_n$ gestrichen und die übriggebbliebenen $f_{2^j}(x) \in M_n$ ohne Änderung der Reihenfolge so indiziert werden, dass $f_n : \mathbb{N}_n \to M_n$ eine Abzählung ist. Formal bedeutet das $f_n(x) := f_{2^j}(i(x))$ mit $x \in \mathbb{N}_n$, wobei $i(x)$ definiert ist als die $x-$te Zahl unter $f_{2^j}(1), f_{2^j}(2), f_{2^j}(3)\ldots$, die nicht größer als n ist. f_n ist dann eine Abzählung $f_n : \mathbb{N}_n \to M_n$, da es n Zahlen in M_{2^j} gibt, die nicht größer als n sind, nämlich genau die Zahlen $x \in M_n$. Da die Reihenfolge der Elemente des Bilds von f_{2^j} nicht geändert wurde und lediglich einige Elemente des Bilds von f_{2^j} entfernt wurden, gibt es wie bei f_{2^j} auch bei f_n kein $a < s < b$ mit $f_n(s) = \frac{1}{2}\left(f_n(a) + f_n(b)\right)$, d.h. f_n ist wie f_{2^j} sortiert.

Nach den Hilfssätzen 4.1 und 4.2 existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ eine sortierte Abzählung, q.e.d.

A Aufgabe 3, Beweis 2

Beweis. (über $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$).
Kosinussatz im Dreieck ABC ergibt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Die Behauptung, dass $a^2 + bc = c^2$ gilt, ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha &= c^2 - bc \\ \Leftrightarrow \quad b^2 + bc - 2bc\cos\alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad b + c(1 - 2\cos\alpha) &= 0 \qquad (c \neq 0) \\ \Leftrightarrow \quad 2\cos\alpha - 1 &= \frac{b}{c} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Nach dem Sinussatz ist

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

In Beweis 1 wurde gezeigt, dass die Beziehungen

$$\beta = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha, \qquad \gamma = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

gelten. D.h. Gleichung (1.1) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 2\cos\alpha - 1 &= \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \\ &= \frac{\sin(90^\circ - \frac{3}{2}\alpha)}{\sin(90^\circ + \frac{\alpha}{2})} \\ &= \frac{\cos\frac{3}{2}\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Die Behauptung ist bewiesen, wenn Gleichung (1.2) gezeigt werden kann.
Mit $\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$ (vgl. [1]) gilt:

$$\begin{aligned} 2\cos\alpha - 1 &= 2 \cdot \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right) - 1 \\ &= \frac{\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right)\left(e^{\frac{1}{2}i\alpha} + e^{-\frac{1}{2}i\alpha}\right) - \left(e^{\frac{1}{2}i\alpha} + e^{-\frac{1}{2}i\alpha}\right)}{e^{\frac{1}{2}i\alpha} + e^{-\frac{1}{2}i\alpha}} \\ &= \frac{e^{\frac{3}{2}i\alpha} + e^{\frac{1}{2}i\alpha} + e^{-\frac{1}{2}i\alpha} + e^{-\frac{3}{2}i\alpha} - e^{\frac{1}{2}i\alpha} - e^{-\frac{1}{2}i\alpha}}{e^{\frac{1}{2}i\alpha} + e^{-\frac{1}{2}i\alpha}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(e^{\frac{3}{2}i\alpha} + e^{-\frac{3}{2}i\alpha})}{\frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}i\alpha} + e^{-\frac{1}{2}i\alpha})} \\ &= \frac{\cos\frac{3}{2}\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung bewiesen, q.e.d.

B Aufgabe 3, Beweis 3

Beweis. (über Additionstheoreme).
Wie in Beweis 2 soll gezeigt werden, dass Gleichung (1.2) gilt. Hierzu werden die folgenden Additionstheoreme (vgl. [1] 0.2.8, S. 60) verwendet:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y && (2.1) \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x && (2.2) \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x && (2.3) \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\cos \frac{3}{2}\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} &= \frac{\cos(\frac{\alpha}{2}+\alpha)}{\cos \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha - \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \qquad (\text{vgl. } (2.1)) \\ &= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos(2 \cdot \frac{\alpha}{2}) - \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin(2 \cdot \frac{\alpha}{2})}{\cos \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \qquad (\text{vgl. } (2.2), (2.3)) \\ &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 3(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}) \\ &= 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 3. \qquad (2.4) \end{aligned}$$

D.h. Gleichung (1.2) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 2\cos\alpha - 1 &= 4\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 3 \\ \Leftrightarrow \quad 2\cos(2 \cdot \frac{\alpha}{2}) &= 4\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \\ \Leftrightarrow \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \qquad (\text{vgl. } (2.2)) \\ \Leftrightarrow \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} - (1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}) &= 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \\ \Leftrightarrow \quad 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 &= 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, dass Gleichung (1.2) gilt, q.e.d.

Literatur

[1] BRONSTEIN, I. N.: *Teubner-Taschenbuch der Mathematik.* Teubner-Verlag, Wiesbaden, 2003.