Celtis-Gymnasium
Schweinfurt

Kollegstufe 2004/2006
Leistungskurs Mathematik

Facharbeit

Bearbeitung der Aufgaben der 1. Runde des Bundeswettbewerb Mathematik 2005 mit Teilnahme

Verfasser: Marcel Schmittfull
Tag der Ablieferung: 22.04.2005
Kursleiter: StD Bauer

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

1.1 Aufgabenstellung

Voraussetzung. Im Zentrum eines 2005 x 2005-Schachbretts liegt ein Spielwürfel, der in einer Folge von Zügen über das Brett bewegt werden soll. Ein Zug besteht dabei aus folgenden drei Schritten:

- Man dreht den Würfel mit einer beliebigen Seite nach oben,
- schiebt dann den Würfel um die angezeigte Augenzahl nach rechts oder um die angezeigte Augenzahl nach links und
- schiebt anschließend den Würfel um die verdeckt liegende Augenzahl nach oben oder um die verdeckt liegende Augenzahl nach unten.

Das erreichte Feld ist das Ausgangsfeld für den nächsten Zug.
Welche Felder lassen sich durch eine endliche Folge derartiger Züge erreichen?
Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.
Behauptung. Alle Felder sind durch eine endliche Folge an gültigen Zügen erreichbar.

1.2 Beweis

Definition 1.1 *Das* 2005×2005-*Schachbrett wird durch*

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -1002 \leq x, y \leq 1002\}$$

dargestellt, wobei $(0, 0)$ *für das Zentrum steht,* x *für die Horizontal- und* y *für die Vertikalkoordinate.*

Definition 1.2 *Ein (gültiger oder ungültiger)* Zug *ist definiert durch*

$$Z_a^b : \; S \to S, \;\; (x, y) \to (x, y)+(a, b) = (x+a, y+b), \quad a, b \in \mathbb{Z}, (x+a, y+b) \in S.$$

Definition 1.3 *Ein Zug* Z_a^b *wird genau dann* gültig *genannt, wenn* $a, b \in \{\pm1, \pm2, \ldots, \pm6\}$ *und* $|a| + |b| = 7$ *gilt.*[1]

[1] Die Summe zweier gegenüberliegender Augenzahlen eines Würfels ergibt 7.

Definition 1.4 *Ein Feld $(x,y) \in S$ ist genau dann* erreichbar*, wenn eine endliche Folge bzw. Komposition gültiger Züge $(Z_{a_i}^{b_i})^n$ so existiert, dass $(Z_{a_i}^{b_i})^n \circ (0,0) = (x,y)$ gilt.*

Hilfssatz 1.1 *Wenn alle Felder im Quadrant $S_I = \{(x,y) \in S \mid x,y > 0\}$ und das Zentrum $(0,0)$ erreichbar sind, dann sind alle Felder in S erreichbar.*

Beweis. (Durch Symmetrie.) Man betrachte $(x,y) \in S_I$. Die endliche Folge gültiger Züge, die von $(0,0)$ zu (x,y) führt, sei $(Z_{a_i}^{b_i})^n$. Das zum Feld (x,y) im II. Quadrant korrespondierende Feld $(-x,y)$ erreicht man dann durch die Folge gültiger Züge $(Z_{-a_i}^{b_i})^n$. Die zu (x,y) korrespondierenden Felder $(-x,-y)$ bzw. $(x,-y)$ im III. bzw. IV. Quadrant erreicht man analog durch die Folge gültiger Züge $(Z_{-a_i}^{-b_i})^n$ bzw. $(Z_{a_i}^{-b_i})^n$. Es sind also alle Felder der vier Quadranten von S erreichbar. Da laut Voraussetzung das Feld $(0,0)$ erreichbar ist, sind also alle Felder von S erreichbar.

Hilfssatz 1.2 *Die Züge Z_1^0 und Z_0^1 sind jeweils endliche Folgen gültiger Züge $(Z_{a_i}^{b_i})^n$.*

Beweis. Es gilt

$$Z_1^0 = Z_5^2 \circ \overbrace{Z_{-3}^4 \circ Z_{-1}^{-6}}^{Z_{-4}^{-2}} \tag{1.1}$$

$$Z_0^1 = Z_2^5 \circ \underbrace{Z_4^{-3} \circ Z_{-6}^{-1}}_{Z_{-2}^{-4}}. \tag{1.2}$$

Hilfssatz 1.3 *Alle Felder in S_I sind von $(0,0)$ aus durch eine endliche Folge gültiger Züge erreichbar, d.h. für alle $(x,y) \in S_I$ existiert $(Z_{a_i}^{b_i})^n$, sodass $(Z_{a_i}^{b_i})^n \circ (0,0) = (x,y)$. Dabei liegen die Felder nach jeder Zwischenfolge innerhalb des Schachbretts S, d.h. $(Z_{a_i}^{b_i})^k \circ (0,0) \in S$ für alle $0 < k \in \mathbb{N} \leq n$.*

Beweis. Sei $(x,y) \in S_I$. Man erreicht (x,y), indem man von $(0,0)$ ausgehend zunächst $|x|$ Mal die endliche Folge gültiger Züge $Z_{\operatorname{sign} x}^0$ und anschließend $|y|$ Mal die endliche Folge gültiger Züge $Z_0^{\operatorname{sign} y}$ ausführt.[2] Formal heißt das

$$(x,y) = (Z_1^0)^{|x|} \circ (Z_0^1)^{|y|} \circ (0,0). \tag{1.3}$$

[2] Obwohl wegen $(x,y) \in S_I$ $x,y > 0$ gilt, werden hier einmalig Betrag und Signum-Funktion verwendet, um die Korrespondenz zu den symmetrischen Quadranten II bis IV zu veranschaulichen.

Es muss nun gezeigt werden, dass der Würfel bei dieser Zugstrategie nach jeder Zwischenfolge an Zügen stets innerhalb des Schachbretts liegt, d.h. dass $(Z_{a_i}^{b_i})^k \circ (0,0) \in S$ für alle $0 < k \in \mathbb{N} \leq n$ gilt.

Sei $(x_j, y_j) := (Z_{a_i}^{b_i})^j \circ (0,0) \in S, 0 < j \in \mathbb{N} < n$ das Feld des Würfels nach den ersten j Teilzügen des Gesamtzugs von $(0,0)$ zu (x,y) nach Gleichung (1.3). Nach Gleichung (1.3) wird der Würfel von (x_j, y_j) zu $Z_1^0 \circ (x_j, y_j)$ bzw. $Z_0^1 \circ (x_j, y_j)$ bewegt. Da die Gesamtverschiebung nach jedem Zug Z_1^0 bzw. Z_0^1 in (1.3) stets nach rechts oder oben verläuft, Z_1^0 bzw. Z_0^1 nach (1.1) bzw. (1.2) eine Verschiebung um nicht mehr als sechs Felder nach links bzw. unten benötigen und der linke bzw. untere Rand bei $x = -1002$ bzw. $y = -1002$ liegen, können der linke oder der untere Rand durch (1.3) nicht überschritten werden. Der erste Teilzug für jeden Zug Z_1^0 bzw. Z_0^1 in (1.1) bzw. (1.2) ist Z_{-1}^{-6} bzw. Z_{-6}^{-1}, d.h. ausgehend von $(x_j, y_j) \in S$ können durch den ersten Teilzug weder der rechte, noch der obere Rand des Schachbretts verlassen werden. Die ersten beiden Teilzüge von Z_1^0 bzw. Z_0^1 entsprechen Z_{-4}^{-2} bzw. Z_{-2}^{-4}, d.h. auch diese Züge können den rechten oder den oberen Rand nicht überschreiten. Mit dem dritten Teilzug Z_5^2 bzw. Z_2^5 vollendet man schließlich zum Gesamtzug Z_1^0 bzw. Z_0^1. Dabei wird der Würfel durch den dritten Teilzug relativ zum Ausgangsfeld (x_j, y_j) a) um *genau ein* Feld nach rechts zu $Z_1^0 \circ (x_j, y_j) = (x_j + 1, y_j)$ bzw. b) um *genau ein* Feld nach oben zu $Z_0^1 \circ (x_j, y_j) = (x_j, y_j + 1)$ geschoben. Nach Gleichung (1.3) gilt in Fall a) $0 < x_j < x$ und $0 < y_j \leq y$ bzw. in Fall b) $0 < x_j \leq x$ und $0 < y_j < y$. Wegen $(x, y) \in S$ ist somit auch $(x_j + 1, y_j) \in S$ bzw. $(x_j, y_j + 1) \in S$. Also gilt bei der durch Gleichung (1.3) gegebenen Zugstrategie $(Z_{a_i}^{b_i})^k \circ (0,0) \in S$ für alle $0 < k \in \mathbb{N} \leq n$.

Folglich sind alle Felder $(x, y) \in S_I$ von $(0,0)$ ausgehend ohne Verlassen von S erreichbar.

Satz 1.1 *Alle Felder $(x, y) \in S$ sind erreichbar.*

Beweis. Ist $(x, y) = (0, 0)$, so ist $(0,0)$ zum Beispiel durch $(0,0) = Z_6^1(Z_{-6}^{-1}((0,0)))$ erreichbar. Also folgt aus den Hilfssätzen 1.3 und 1.1, dass alle Felder $(x, y) \in S$ erreichbar sind, q.e.d.

Aufgabe 2

2.1 Aufgabenstellung

Voraussetzung. Die ganze Zahl a habe die Eigenschaft, dass $3a$ in der Form $3a = x^2 + 2y^2$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ darstellbar ist.
Behauptung. a ist ebenfalls in dieser Form darstellbar.

2.2 Beweis über Restklassen

Beweis. Sei $a \in \mathbb{Z}$ gesetzt. Gesucht sind nun $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $p^2 + 2q^2 = a$.
Laut Voraussetzung gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $3a = x^2 + 2y^2$. Umformung ergibt:

$$\begin{aligned} a &= \frac{x^2 + 2y^2}{3} = \frac{1}{9}\left(3x^2 + 6y^2\right) \\ &= \frac{1}{9}\left[x^2 \pm 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 \;+\; 2 \cdot (x^2 \mp 2 \cdot x \cdot y + y^2)\right] \\ &= \frac{1}{9}\left[(x \pm 2y)^2 + 2(x \mp y)^2\right] \\ &= \left(\frac{x \pm 2y}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x \mp y}{3}\right)^2 . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Hilfssatz 2.1 *Sei $3a = x^2 + 2y^2$ mit $a, x, y \in \mathbb{Z}$. Aus $x \equiv y \bmod 3$ folgt, dass $\frac{x+2y}{3}$ und $\frac{x-y}{3}$ ganzzahlig sind. Aus $x \not\equiv y \bmod 3$ folgt, dass $\frac{x-2y}{3}$ und $\frac{x+y}{3}$ ganzzahlig sind.*

Beweis. Wegen $3a = x^2+2y^2$ ist $x^2+2y^2 \equiv 0 \bmod 3$. Es sind $x, y \in \{0, 1, 2 \bmod 3\}$.
Die Tabelle zeigt alle Kombinationen:

x mod 3	0 1 2	0 1 2	0 1 2
y mod 3	0 0 0	1 1 1	2 2 2
$(x^2 + 2y^2) \bmod 3$	0 1 1	2 0 0	2 0 0

Damit $x^2 + 2y^2 \equiv 0 \bmod 3$ gilt, muss also 1. $x \equiv y \bmod 3$ oder 2. $x \equiv 1 \bmod 3, y \equiv 2 \bmod 3$ oder 3. $x \equiv 2 \bmod 3, y \equiv 1 \bmod 3$ sein. In Fall 1. ist $x+2y \equiv x-y \equiv 0 \bmod 3$. In den Fällen 2. und 3. sind $x-2y \equiv x+y \equiv 0 \bmod 3$. Folglich ist $\frac{x+2y}{3}$ und $\frac{x-y}{3}$ falls $x \equiv y \bmod 3$ bzw. $\frac{x-2y}{3}$ und $\frac{x+y}{3}$ falls $x \not\equiv y \bmod 3$ ganzzahlig.

Wenn $x \equiv y \bmod 3$, so setze man

$$p_1 = \frac{x+2y}{3}, q_1 = \frac{x-y}{3},$$

falls $x \not\equiv y \bmod 3$ setze man

$$p_2 = \frac{x-2y}{3}, q_2 = \frac{x+y}{3}.$$

Nach Hilfssatz 2.1 sind dann $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}$ oder $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}$. Die Darstellung für a ist dann nach Gleichung (2.1)

$$a = p_1^2 + 2q_1^2 \quad \text{oder} \quad a = p_2^2 + 2q_2^2,$$

q.e.d.

Aufgabe 3

3.1 Aufgabenstellung

Voraussetzung. Den Seiten a, b, c eines Dreiecks liegen die Winkel α, β, γ gegenüber.
Behauptung. Aus $3\alpha + 2\beta = 180°$ folgt $a^2 + bc = c^2$.

3.2 Elementargeometrischer Beweis

Beweis. (Elementargeometrisch).

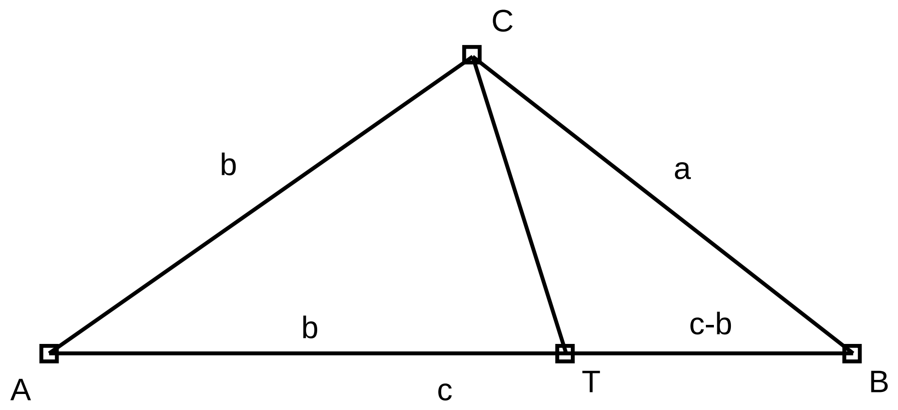

Abbildung 3.1: Skizze zu Aufgabe 3

Die Eckpunkte des Dreiecks mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ werden mit A, B, C bezeichnet, vgl. Skizze.
Zunächst folgt aus $3\alpha + 2\beta = 180°$

$$\beta = (180° - 3\alpha)/2 = 90° - \frac{3}{2}\alpha.$$

Mit Innenwinkelsumme im Dreieck ABC $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ gilt

$$\begin{aligned}
\gamma &= 180° - \alpha - \beta \\
&= 180° - \alpha - 90° + \frac{3}{2}\alpha \\
&= 90° + \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

Der Punkt T liege auf der Geraden AB mit dem Abstand $\overline{AT} = b$ vom Punkt A (vgl. Skizze). Dann ist das Dreieck ATC gleichschenklig mit den Schenkeln $[AT]$ und $[AC]$. Also gilt im Dreieck ATC wegen Innenwinkelsumme $\angle CTA = \angle ACT = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Somit folgt $\angle BTC = 180^\circ - \angle CTA = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Im Dreieck BCT gilt wegen Innenwinkelsumme $\angle TCB = 180^\circ - \angle BTC - \beta = \alpha$.

Die Dreiecke BCT und ABC sind ähnlich, da ihre Innenwinkel übereinstimmen:

$$\begin{aligned} \alpha &= \angle TCB \\ \beta &= \angle CBA = \angle CBT \\ \gamma &= \angle BTC \quad (= 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha) \end{aligned}$$

Wegen $\overline{AT} = b$ ist $\overline{TB} = c - b$. Aus dem gleichen Verhältnis zweier Seiten in ähnlichen Dreiecken folgt

$$\begin{aligned} \frac{\overline{TB}}{\overline{BC}} &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{c-b}{a} &= \frac{a}{c} \\ \Rightarrow \quad c(c-b) &= a^2 \\ \Rightarrow \quad c^2 &= a^2 + bc, \quad q.e.d. \end{aligned}$$

3.3 Trigonometrischer Beweis

Beweis. (über $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$).
Kosinussatz im Dreieck ABC ergibt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Die Behauptung, dass $a^2 + bc = c^2$ gilt, ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha &= c^2 - bc \\ \Leftrightarrow \quad b^2 + bc - 2bc\cos\alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad b + c(1 - 2\cos\alpha) &= 0 \qquad (c \neq 0) \\ \Leftrightarrow \quad 2\cos\alpha - 1 &= \frac{b}{c} \qquad (3.1) \end{aligned}$$

Nach dem Sinussatz ist

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

In Beweis 3.2 wurde gezeigt, dass die Beziehungen

$$\beta = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha, \qquad \gamma = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

gelten. D.h. Gleichung (3.1) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 2\cos\alpha - 1 &= \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \\ &= \frac{\sin(90^\circ - \frac{3}{2}\alpha)}{\sin(90^\circ + \frac{\alpha}{2})} \\ &= \frac{\cos\frac{3}{2}\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Die Behauptung ist bewiesen, wenn Gleichung (3.2) gezeigt werden kann.
Mit $\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$ (vgl. [1] Kapitel 0.2.8, S. 56) gilt:

$$\begin{aligned} 2\cos\alpha - 1 &= 2\cdot\frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right) - 1 \\ &= \frac{\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right)\left(e^{\frac{1}{2}i\alpha} + e^{-\frac{1}{2}i\alpha}\right) - \left(e^{\frac{1}{2}i\alpha} + e^{-\frac{1}{2}i\alpha}\right)}{e^{\frac{1}{2}i\alpha} + e^{-\frac{1}{2}i\alpha}} \\ &= \frac{e^{\frac{3}{2}i\alpha} + e^{\frac{1}{2}i\alpha} + e^{-\frac{1}{2}i\alpha} + e^{-\frac{3}{2}i\alpha} - e^{\frac{1}{2}i\alpha} - e^{-\frac{1}{2}i\alpha}}{e^{\frac{1}{2}i\alpha} + e^{-\frac{1}{2}i\alpha}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(e^{\frac{3}{2}i\alpha} + e^{-\frac{3}{2}i\alpha})}{\frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}i\alpha} + e^{-\frac{1}{2}i\alpha})} \\ &= \frac{\cos\frac{3}{2}\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung bewiesen, q.e.d.

3.4 Beweis über Additionstheoreme

Beweis. (über Additionstheoreme).
Wie in Beweis 3.3 soll gezeigt werden, dass Gleichung (3.2) gilt. Hierzu werden die folgenden Additionstheoreme (vgl. [1] Kapitel 0.2.8, S. 60) verwendet:

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y \tag{3.3}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{3.4}$$

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x \tag{3.5}$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos\frac{3}{2}\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} &= \frac{\cos(\frac{\alpha}{2}+\alpha)}{\cos\frac{\alpha}{2}} \\
&= \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} \qquad \text{(vgl. (3.3))} \\
&= \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos(2\cdot\frac{\alpha}{2}) - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin(2\cdot\frac{\alpha}{2})}{\cos\frac{\alpha}{2}} \\
&= \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \qquad \text{(vgl. (3.4), (3.5))} \\
&= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \\
&= \cos^2\frac{\alpha}{2} - 3(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}) \\
&= 4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 3. \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

D.h. Gleichung (3.2) ist äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
2\cos\alpha - 1 &= 4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 3 \\
\Leftrightarrow \quad 2\cos(2\cdot\frac{\alpha}{2}) &= 4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2 \\
\Leftrightarrow \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} &= 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \qquad \text{(vgl. (3.4))} \\
\Leftrightarrow \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} - (1-\cos^2\frac{\alpha}{2}) &= 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \\
\Leftrightarrow \quad 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 &= 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1
\end{aligned}
$$

Somit ist gezeigt, dass Gleichung (3.2) gilt, q.e.d.

Aufgabe 4

4.1 Aufgabenstellung

Behauptung. Für alle positiven ganzen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ kann man die n Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ so in einer Reihe anordnen, dass für je zwei beliebige Zahlen der Reihe ihr arithmetisches Mittel nicht zwischen ihnen steht.

4.2 Beweis über vollständige Induktion

Für den Beweis ist zunächst folgende Definition für eine sortierte Reihe sinnvoll.

Definition 4.1 *Sei $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \mathbb{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Wenn eine Abzählung*[1] *$f_n : \mathbb{N}_n \to M_n$ so existiert, dass für beliebige $a, b \in \mathbb{N}_n, a < b$ kein $a < s \in \mathbb{N}_n < b$ existiert mit $f_n(s) = \frac{1}{2}(f_n(a) + f_n(b))$, dann wird diese Abzählung* sortiert *genannt.*

Die Behauptung besagt nun, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ eine sortierte Abzählung f_n existiert. Für $n = 1$ ist die Behauptung klar, da das Bild von f_1 nur die 1 enthält. Für $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$ wird die Behauptung zunächst durch vollständige Induktion gezeigt, anschließend wird auf alle $n \in \mathbb{N}$ geschlossen.

Hilfssatz 4.1 *Für alle $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$ existiert eine sortierte Abzählung f_n.*

Beweis. (durch vollständige Induktion über k).

- *Induktionsanfang:* $n = 2$. Wenn $f_2(1) = 1$ und $f_2(2) = 2$ gesetzt wird, ist f_2 sortiert.
- *Induktionsschritt: Behauptung.* Wenn für $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$ eine sortierte Abzählung $f_{2^k} = f_n$ existiert, dann existiert auch eine sortierte Abzählung $f_{2^{k+1}} = f_{2n}$.

[1] Definition *Abzählung*: Sei M_n eine $n-$Menge, $\mathbb{N}_n = \{1, \ldots, n\}$, so nennt man eine bijektive Abbildung $f_n : \mathbb{N}_n \to M_n$ eine *Abzählung*.

Beweis. Sei f_n eine sortierte Abzählung (Induktionsvoraussetzung). Man setze dann $f_{2n} : \mathbb{N}_{2n} \to M_{2n}$,

$$f_{2n}(x) = \begin{cases} 2f_n(x), & 1 \leq x \leq n \\ 2f_n(x-n) - 1, & n < x \leq 2n. \end{cases} \tag{4.1}$$

Es soll gezeigt werden, dass f_{2n} eine sortierte Abzählung ist. f_{2n} ist eine bijektive Abbildung $f_{2n} : \mathbb{N}_{2n} \to M_{2n}$ (also eine Abzählung), denn f_{2n} ordnet jedem $x \in \mathbb{N}_{2n}$ genau ein $f_{2n}(x) \in M_{2n}$ zu.[2] Seien nun $a, b \in \mathbb{N}_{2n}$ mit $a < b$. Es soll gezeigt werden, dass f_{2n} sortiert ist, d.h. dass kein $a < s \in \mathbb{N}_{2n} < b$ existiert mit $f_{2n}(s) = \frac{1}{2}\left(f_{2n}(a) + f_{2n}(b)\right)$. Dazu werden drei Fälle von a, b unterschieden.

- $a \leq n$ und $n < b \leq 2n$:
  $f_{2n}(a)$ ist nach Definition gerade und $f_{2n}(b)$ ungerade. Demnach ist aber für alle $a < s < b$ $\frac{1}{2}\left(f_{2n}(a) + f_{2n}(b)\right) \notin \mathbb{N}$, d.h. insbesondere $f_{2n}(s) \neq \frac{1}{2}\left(f_{2n}(a) + f_{2n}(b)\right)$ für alle $a < s < b$.
- $1 \leq a, b \leq n$:
  Es gilt $f_{2n}(a) = 2f_n(a)$ und $f_{2n}(b) = 2f_n(b)$, also
  $$\frac{1}{2}\left(f_{2n}(a) + f_{2n}(b)\right) = f_n(a) + f_n(b).$$
  Da f_n eine sortierte Abzählung ist, haben alle $f_n(s)$ mit $a < s < b$ die Eigenschaft $f_n(s) \neq \frac{1}{2}\left(f_n(a) + f_n(b)\right)$. Also haben alle $f_{2n}(s) = 2f_n(s)$ mit $a < s < b$ die Eigenschaft
  $$f_{2n}(s) = 2f_n(s) \neq 2 \cdot \frac{1}{2}\left(f_n(a) + f_n(b)\right) = f_n(a) + f_n(b).$$
  Folglich gilt für alle $a < s < b$
  $$f_{2n}(s) \neq f_n(a) + f_n(b) = \frac{1}{2}\left(f_{2n}(a) + f_{2n}(b)\right).$$
- $n < a, b \leq 2n$:
  Es gilt $f_{2n}(a) = 2f_n(a-n) - 1$ und $f_{2n}(b) = 2f_n(b-n) - 1$, also
  $$\frac{1}{2}\left(f_{2n}(a) + f_{2n}(b)\right) = f_n(a-n) + f_n(b-n) - 1.$$

[2] $\{2f_n(x) \mid x = 1, 2, \ldots, n\} = \{2, 4, 6, \ldots, 2n\}$ und $\{2f_n(x) - 1 \mid x = 1, 2, \ldots, n\} = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$, da das Bild der bijektiven Abbildung f_n gleich $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ ist.

Da f_n eine sortierte Abzählung ist, haben alle $f_n(s-n)$ mit $a < s < b$ die Eigenschaft $f_n(s-n) \neq \frac{1}{2}\left(f_n(a-n) + f_n(b-n)\right)$. Also haben alle $f_{2n}(s) = 2f_n(s-n) - 1$ mit $a < s < b$ die Eigenschaft

$$\begin{aligned} f_{2n}(s) &= 2 \cdot f_n(s-n) - 1 \\ &\neq 2 \cdot \frac{1}{2}\left(f_n(a-n) + f_n(b-n)\right) - 1 = f_n(a-n) + f_n(b-n) - 1. \end{aligned}$$

Folglich gilt für alle $a < s < b$

$$f_{2n}(s) \neq f_n(a-n) + f_n(b-n) - 1 = \frac{1}{2}\left(f_{2n}(a) + f_{2n}(b)\right).$$

Somit gilt bei beliebigen $a, b \in \mathbb{N}_{2n}$ mit $a < b$ für alle $a < s < b$ die Ungleichung

$$f_{2n}(s) \neq \frac{1}{2}\left(f_{2n}(a) + f_{2n}(b)\right).$$

Die Abzählung f_{2n} ist also sortiert, d.h. der Induktionsschritt ist bewiesen.

Da der Induktionsanfang für $n = 2$ gilt und der Induktionsschritt von n auf $2n$ ebenfalls gezeigt wurde, gibt es für alle $n = 2^k$ eine sortierte Abzählung f_n.

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass auch für alle n, die sich nicht als 2^k darstellen lassen, eine sortierte Abzählung existiert. An einem kurzen Beispiel sieht man dies leicht ein, sei z.B. $n = 6$. Dann gibt es nach Hilfssatz 4.1 für $n = 2^3 = 8$ eine sortierte Abzählung bzw. Reihe, z.B. $2, 6, 8, 4, 1, 5, 3, 7$. Diese Reihe wird für $n = 6$ zu $2, 6, 4, 1, 5, 3$ „transformiert", d.h. die Zahlen 7 und 8 werden gestrichen und die Reihenfolge der Restzahlen bleibt erhalten; diese Reihe für $n = 6$ ist also wie die Reihe für $n = 8$ sortiert. Formal lässt sich dies wie folgt formulieren:

Hilfssatz 4.2 *Wenn sortierte Abzählungen f_n für alle $n \in \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ existieren, dann existieren sortierte Abzählungen f_n für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Für $n = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ wurde bereits gezeigt, dass es sortierte Abzählungen f_n gibt. Sei also n eine natürliche Zahl, die sich nicht in der Form $n = 2^k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ darstellen lässt. Dann sei 2^j die kleinste Zweierpotenz für die $n < 2^j$ gilt. Für 2^j gibt es wie oben gezeigt eine sortierte Abzählung f_{2^j}. Diese Abzählung f_{2^j} kann so zu einer Abzählung f_n „transformiert" werden, dass diese ebenfalls sortiert ist. Hierzu muss das Bild von f_{2^j} von M_{2^j} auf $M_n \subset M_{2^j}$ eingeschränkt werden, indem anschaulich gesprochen alle $f_{2^j}(x) \notin M_n$ gestrichen und die übriggebbliebenen $f_{2^j}(x) \in M_n$ ohne Änderung der Reihenfolge so indiziert werden, dass $f_n : \mathbb{N}_n \to M_n$ eine Abzählung ist. Formal bedeutet das $f_n(x) := f_{2^j}(i(x))$ mit $x \in \mathbb{N}_n$, wobei $i(x)$ definiert ist als die $x-$te Zahl unter $f_{2^j}(1), f_{2^j}(2), f_{2^j}(3)\ldots$, die nicht größer als n ist. f_n ist dann eine Abzählung $f_n : \mathbb{N}_n \to M_n$, da es n Zahlen in M_{2^j} gibt, die nicht größer als n sind, nämlich genau die Zahlen der Menge M_n. Da die Reihenfolge der Elemente des Bilds von f_{2^j} nicht geändert wurde und lediglich einige Elemente des Bilds von f_{2^j} entfernt wurden, gibt es wie bei f_{2^j} auch bei f_n kein $a < s < b$ mit $f_n(s) = \frac{1}{2}\left(f_n(a) + f_n(b)\right)$, d.h. f_n ist wie f_{2^j} sortiert.

Nach den Hilfssätzen 4.1 und 4.2 existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ eine sortierte Abzählung, q.e.d.

Literatur

[1] Bronstein, I. N.: *Teubner-Taschenbuch der Mathematik.* Teubner-Verlag, Wiesbaden, 2003.