34. Internationale Physik-Olympiade 2003
Lösungen zur 2. Runde

Marcel Schmittfull

November 2002

Teilnehmer:

Name	Marcel Schmittfull
Adresse	Salierstr. 10
	97505 Geldersheim
Telefon	(0 97 21) 8 27 27
e-Mail	marcel-sl@gmx.de
Geb.datum	10.08.1987
Klasse	10a

Schule	Celtis Gymnasium
Adresse	Gymnasiumstr. 16
	97421 Schweinfurt
Telefon	(0 97 21) 67 50 60
Betr.lehrer	Peter Krahmer

Inhaltsverzeichnis

1 Oberflächenbeschichtung

1.1 Mittlere Geschwindigkeit

Allgemein ist ein Mittelwert der Quotient aus der Summe aller Bestandteile und der Anzahl aller Bestandteile. Demnach erhält man den Mittelwert $\bar{v}$ aller Geschwindigkeiten, indem man alle Geschwindigkeiten der N Gasmoleküle addiert bzw. integriert und dann durch N dividiert:

$$\bar{v} = \frac{\int\limits_0^\infty v \, \mathrm{d}N}{N}$$

Wegen

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = P(v) \, \mathrm{d}v$$

gilt also

$$\bar{v} = \int\limits_0^\infty v P(v) \, \mathrm{d}v \tag{1.1}$$

Drückt man $P(v)$ durch die in der Aufgabenstellung angegebene Funktion aus, so ergibt sich:

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} \int\limits_0^\infty v^3 \, \mathrm{e}^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \, \mathrm{d}v$$

Dem Hinweis am Ende der Aufgabenstellung zu Folge lautet mit der Abkürzung $k = \frac{M}{2RT}$ die Lösung für dieses Integral:

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{k}{\pi} \right)^{3/2} \left[-\frac{1}{2} \, \mathrm{e}^{-kv^2} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{v^2}{k} \right) + C \right]_0^\infty \tag{1.2}$$

Da allgemein $\mathrm{e}^{-\infty}$ schneller gegen 0 strebt als irgendeine Funktion x^n gegen ∞, kann man $\mathrm{e}^{-\infty} \cdot v^\infty \to 0$ schreiben. Weil außerdem $\mathrm{e}^{-0} = 1$ und $0^2 = 0$ gilt, wird Gleichung (1.2) zu

$$\begin{aligned} \bar{v} &= 4\pi \left(\frac{k}{\pi} \right)^{3/2} \left(C + \frac{1}{2k^2} - C \right) \\ &= 2\pi^{-1/2} k^{-1/2} \\ &= \underline{\sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{RT}{M}}} \end{aligned} \tag{1.3}$$

1.2 Auftreffrate

Setzt man Gleichung (1.3) in die gegebene Gleichung $A = \frac{1}{4} n \bar{v}$ ein, so erhält man:

$$A = \frac{1}{4} n \bar{v} \tag{1.4}$$

$$= \frac{1}{2} n \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{RT}{M}} \tag{1.5}$$

Nun müssen laut Aufgabenstellung die molare Masse M und die Gaskonstante R durch die Masse eines Gasmoleküls m, den Druck P, und die Boltzmann-Konstante k_B ersetzt werden.

Für die molare Masse M gilt:

$$M = N_A \cdot m \tag{1.6}$$

Das bekannte Gesetz von Gay-Lussac ist:

$$Pv = CT, \ C \text{ Konstante} \tag{1.7}$$

Laut [2] ergibt sich für C:

$$C = k_B N \tag{1.8}$$

wobei hier N die Anzahl der Gasmoleküle darstellt und k_B die sog. Boltzmann-Konstante ist. Setzt man Gleichung (1.8) in Gleichung (1.7) ein, erhält man:

$$Pv = k_B N T \tag{1.9}$$

Durch die Beziehung

$$n = \frac{N}{v} \tag{1.10}$$

ergibt sich für Gleichung (1.9):

$$n = \frac{P}{k_B T} \tag{1.11}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (1.6) und (1.11) in Gleichung (1.5) ergibt sich für die Auftreffrate A:

$$A = \frac{P}{2k_B T} \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{RT}{N_A m}} \tag{1.12}$$

Weil

$$R = k_B N_A \tag{1.13}$$

gilt, erhält man für Gleichung (1.12):

$$A = \frac{P}{2k_B T} \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{k_B T}{m}} \tag{1.14}$$

Diese Gleichung lässt sich noch vereinfachen:

$$\underline{A = P \sqrt{\frac{1}{2\pi k_B T m}}} \tag{1.15}$$

Wie man sieht wird A lediglich durch P, T, m und k_B ausgedrückt.

1.3 Dauer bis zu monomolekularer Sauerstoffschicht

Wenn sich allgemein auf einer Fläche S eine monomolekulare Sauerstoffschicht gebildet hat, gilt:

$$S = N \cdot (r_{O_2}^2 \pi) \tag{1.16}$$

wobei r_{O_2} der gegebene Radius eines Sauerstoffmoleküls ist und N die Anzahl aller Moleküle auf S darstellt.

Die Auftreffrate A sagt aus, wie viele Moleküle N in einer bestimmten Zeit t auf eine bestimmte Fläche S auftreffen:

$$A = \frac{N}{tS} \tag{1.17}$$

Für die Anzahl der Moleküle N gilt demnach also:

$$N = AtS \tag{1.18}$$

Setzt man Gleichung (1.18) in Gleichung (1.16) ein, so ergibt sich:

$$S = AtS \cdot r_{O_2}^2 \pi \tag{1.19}$$

Durch Kürzen von S und Umstellen nach t erhält man[1]:

$$t = \frac{1}{\pi r_{O_2}^2 A} \tag{1.20}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (1.15) in Gleichung (1.20) ergibt sich für die Dauer t:

$$t = \frac{\sqrt{2\pi k_B T m_{O_2}}}{\pi r_{O_2}^2 P} \tag{1.21}$$

Setzt man in diese Gleichung nun die in der Aufgabenstellung gegebenen Werte ein, so erhält man[2]:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sqrt{2\pi \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \cdot 573\,\mathrm{K} \cdot 32,0 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}}{\pi \cdot (3,6 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m})^2 \cdot 133\,\mathrm{Pa}} \\ &= 9,49 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s} \\ &\approx \underline{95\ \mu\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{1.22}$$

1.4 Dauer unter Berücksichtigung einer Mindestenergie

Die mittlere Bewegungsenergie $\bar{E_{kin}}$ eines Teilchens ist allgemein gegeben durch:

$$\bar{E_{kin}} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 \tag{1.23}$$

wobei m die Masse des jeweiligen Teilchens bezeichnet und $\bar{v}$ die mittlere Geschwindigkeit dieses Teilchens darstellt. Für die minimale Energie $E_{kin,min}$, die für das Festsetzen des Teilchens auf der Oberfläche notwendig ist, gilt:

$$E_{kin,min} = 1\,\mathrm{eV} = \frac{1}{2} m v_{min}^2 \tag{1.24}$$

v_{min} ist hier die minimale Geschwindigkeit, die das Teilchen haben muss um sich auf der Oberfläche festzusetzen. Setzt man die Masse des O_2-Moleküls 32,0 u in Gleichung (1.24) ein und stellt nach v_{min} um, so erhält man für v_{min}:

$$v_{min} = \sqrt{2 \cdot \frac{1\,\mathrm{eV}}{32\,\mathrm{u}}} \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2 \cdot \frac{1,602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}{32 \cdot 1,661 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}} \\ &\approx 2455\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{1.26}$$

[1] Es scheint so, dass die Dauer t unabhängig von der Fläche S ist. Wegen Gleichung (1.17) beeinflusst die Größe der Oberfläche S die Dauer t jedoch sehr wohl.

[2] Die Masse eines Sauerstoffmoleküls m_{O_2} ist nicht gegeben, beträgt aber allgemein $32,0\,\mathrm{u}$.

Mit Hilfe der in der Aufgabenstellung angegebenen Geschwindigkeitsverteilung $P(v)$ kann nun berechnet werden, wie groß der Anteil der O_2-Moleküle ist, die die Geschwindigkeit v_{min} besitzen:

$$P(v_{min}) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v_{min}^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{Mv_{min}^2}{2RT}} \tag{1.27}$$

Die molare Masse M beträgt laut Gleichung (1.6) mN_A, d.h. sie ist wegen $m = 32,0\,\mathrm{u}$ bekannt. Alle anderen in Gleichung (1.27) vorkommenden Variablen sind ebenfalls bereits bekannt. Um das Einsetzen der bekannten Werte nicht zu unübersichtlich zu machen, wird zunächst der Term $\frac{M}{2RT}$ berechnet:

$$\begin{aligned} \frac{M}{2RT} &= \frac{32 \cdot 1,661 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot 6,022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}}{2 \cdot 8,315\,\mathrm{JK}^{-1}\mathrm{mol}^{-1} \cdot 573\,\mathrm{K}} \\ &\approx 3,36 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}^2/\mathrm{m}^2 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Setzt man jetzt diesen Wert und alle anderen bekannten Werte in Gleichung (1.27) ein, so ergibt sich $P(v_{min})$ zu:

$$\begin{aligned} P(2455\,\mathrm{ms}^{-1}) &= 4\pi \left(\frac{3,36 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}^2\mathrm{m}^{-2}}{\pi}\right)^{3/2} \cdot 2455^2\ \mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2}\ \mathrm{e}^{-3,36\cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}^2\mathrm{m}^{-2}\cdot 2455^2\ \mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2}} \\ &\approx 1,34 \cdot 10^{-10} \end{aligned} \tag{1.29}$$

Die Zeit t_2, die vergeht bis die gesamte Oberfläche beschichtet ist, erhält man durch:

$$t_2 = (1 - P(v_{min})) \cdot t_{(1.22)} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned} &= (1 - 1,34 \cdot 10^{-10}) \cdot 95\ \mu\mathrm{s} \\ &\approx \underline{94,99\ \mu\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{1.31}$$

Dieses Ergebnis ist leider nicht korrekt, weil ja $t_2 > t_{(1.22)}$ gelten muss. Vermutlich liegt der Fehler bereits in Gleichung (1.29). Auf Grund sehr großer Zeitnot kann ich den Fehler jedoch leider nicht mehr finden und ausbessern...

Marcel Schmittfull · Salierstr. 10 · 97505 Geldersheim · marcel-sl@gmx.de

2 Rotierender Oszillator

2.1 Maximale Stauchung der Feder

2.1.1 Vorbemerkungen

Für die *Energien* in dem beschriebenen System gilt:

$$\begin{aligned} \text{Masse } m_2: \quad E_{kin} &= \frac{1}{2} mv^2 && (2.1)\\ \text{Feder:} \quad E_{pot} &= \frac{1}{2} kx^2 && (2.2)\\ \text{Scheibe } m_1: \quad E_{rot} &= \frac{1}{2} I\omega^2 && (2.3) \end{aligned}$$

wobei in Gleichung (2.3) ω für die Winkelgeschwindigkeit steht und I das Trägheitsmoment darstellt. Das polare[1] Trägheitsmoment einer Scheibe ist allgemein gegeben durch

$$I = mr^2 \tag{2.4}$$

Für E_{rot} erhält man demnach also:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} mr^2\omega^2 \tag{2.5}$$

Da laut Aufgabenstellung während des gesamten Vorgangs keine Verformungsarbeit an der Platte und der Masse m_2 geleistet und keine Wärmeenergie erzeugt wird, *bleibt die Gesamtenergie E_{ges} des Systems erhalten.* Es gilt also zu jedem Zeitpunkt:

$$E_{ges} = \frac{1}{2} m_2 v_0^2 = E_{kin} + E_{pot} + E_{rot} \tag{2.6}$$

Weil es sich außerdem um ein abgeschlossenes System handelt, *bleibt der Gesamtdrehimpuls L_{ges} ebenfalls erhalten.* Es gilt daher zu jedem Zeitpunkt:

$$L_{ges} = L_1 + L_2 \tag{2.7}$$

wobei L_1 den Drehimpuls der Scheibe m_1 bezeichnet und L_2 für den Drehimpuls der Masse m_2 steht. Allgemein gilt für den Drehimpuls:

$$\begin{aligned} \text{Translation:} \quad L &= mvr && (2.8)\\ \text{Rotation:} \quad L &= I\omega \\ &= mr^2\omega && (2.9) \end{aligned}$$

Bei Gleichung (2.8) ist bemerkenswert, dass auch wenn eine Masse keine Drehbewegung ausführt, sie doch einen Drehimpuls L relativ zur Drehachse hat. Der Gesamtdrehimpuls L_{ges} des betrachteten Systems ist auf Grund der Gleichungen (2.7) und (2.8) bestimmt durch:

$$L_{ges} = L_1 + L_2 = m_2 v_0 r \tag{2.10}$$

[1] Da die Drehachse laut Aufgabenstellung normal zu der von der Scheibe aufgespannten Ebene ist, muss man das polare (und nicht das äquatoriale) Trägheitsmoment verwenden.

2.1.2 Zeitpunkt der maximalen Stauchung

Die auf die Feder geschossene Masse m_2 staucht die Feder so lange, bis die Geschwindigkeit v_2 von m_2 0 wird. Weil genau dieser Zeitpunkt den Übergang zwischen Stauchung und Dehnung[2] der Feder ist, ist in genau diesem Augenblick – der von nun an Z genannt werden soll – die Stauchung x der Feder maximal. Die Bewegung von m_2 läuft also wie folgt ab: Zunächst wird m_2 auf die Feder geschossen. Dann staucht m_2 die Feder bis zum Zeitpunkt Z, d.h. bis zur maximalen Stauchung x_{max} der Feder. Schließlich dehnt sich die Feder wieder aus, wodurch m_2 wieder zurückbewegt wird. Zusammengefasst gilt also zum Zeitpunkt Z:

$$v_{2,Z} = 0 \tag{2.11}$$
$$x_Z = x_{max} \tag{2.12}$$

Setzt man Gleichung (2.11) in Gleichung (2.1) ein, so ergibt sich die kinetische Energie $E_{kin,Z}$ der Masse m_2 zum Zeitpunkt Z zu:

$$E_{kin,Z} = \frac{1}{2} m_2 v_{2,Z}^2 = 0 \tag{2.13}$$

Setzt man Gleichung (2.11) außerdem in Gleichung (2.8) ein, so erhält man für den Drehimpuls $L_{2,Z}$ der Masse m_2 zum Zeitpunkt Z:

$$L_{2,Z} = m_2 v_{2,Z} r = 0 \tag{2.14}$$

Genau genommen staucht m_2 die Feder gar nicht. Vielmehr bremst die Feder die Masse m_2 und durch dieses Bremsen wird die Länge der Feder kleiner bzw. die Auslenkung x größer. Die Bezeichnung „Bremsen“ wird in der Physik durch eine negative Beschleunigung a ausgedrückt, d.h. am Anfang ist die Beschleunigung a_2 von m_2 negativ. Dann wird – wie oben geschildert – die Geschwindigkeit v_2 von m_2 irgendwann[3] 0 und die Feder hört auf m_2 zu bremsen. Kurz danach geht die Feder wieder auseinander und beschleunigt somit also m_2, d.h. die Beschleunigung a_2 wird positiv. Genau zu dem Zeitpunkt des Überganges zwischen negativer und positiver Beschleunigung a_2 muss a_2 logischerweise 0 sein. Dieser Übergangszeitpunkt ist derselbe Zeitpunkt zu dem auch die Geschwindigkeit v_2 0 ist, d.h. Z. Zum Zeitpunkt Z gilt nun also außerdem:

$$a_{2,Z} = 0 \tag{2.15}$$

2.1.3 Berechnung der maximalen Stauchung

Da der Drehimpuls $L_{2,Z}$ von m_2 zum Zeitpunkt Z laut Gleichung (2.14) 0 ist, wird aus Gleichung (2.10):

$$L_{1,Z} = L_{ges} = m_2 v_0 r \tag{2.16}$$

Da für den Drehimpuls L_1 der Scheibe außerdem noch Gleichung (2.9) gilt, erhält man:

$$L_{1,Z} = m_2 v_0 r = m_1 r^2 \omega_Z$$

Durch Auflösen nach ω_Z ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit ω_Z der Scheibe zum Zeitpunkt Z:

$$\omega_Z = \frac{m_2 v_0}{m_1 r} \tag{2.17}$$

[2] D.h. zwischen größer werdender Auslenkung und kleiner werdender Auslenkung.
[3] Besser: Zum Zeitpunkt Z.

Gleichzeitig erhält man ω durch Betrachtung der Energien. Da die kinetische Energie $E_{kin,Z}$ von m_2 zum Zeitpunkt Z laut Gleichung (2.13) 0 ist, wird aus Gleichung (2.6):

$$E_{rot,Z} = E_{ges} - E_{pot,Z} \tag{2.18}$$

Durch die Gleichungen (2.5), (2.6) und (2.2) erhält man aus Gleichung (2.18):

$$\frac{1}{2}\,m_1 r^2 \omega_Z^2 = \frac{1}{2}\,m_2 v_0^2 - \frac{1}{2}\,k x_Z^2$$

Durch Auflösen nach ω_Z ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit ω_Z der Scheibe zum Zeitpunkt Z:

$$\omega_Z = \sqrt{\frac{m_2 v_0^2 - k x_Z^2}{m_1 r^2}} \tag{2.19}$$

Aus den Gleichungen (2.17) und (2.19) folgt:

$$\frac{m_2 v_0}{m_1 r} = \sqrt{\frac{m_2 v_0^2 - k x_Z^2}{m_1 r^2}} \tag{2.20}$$

Quadrieren auf beiden Seiten liefert:

$$\begin{aligned} \frac{m_2^2 v_0^2}{m_1^2 r^2} &= \frac{m_2 v_0^2 - k x_Z^2}{m_1 r^2} \\ \frac{k x_Z^2}{m_1 r^2} &= \frac{m_2 v_0^2}{m_1 r^2} - \frac{m_2^2 v_0^2}{m_1^2 r^2} \end{aligned}$$

Auflösen nach x_Z ergibt:

$$x_Z = \sqrt{\frac{m_1 r^2}{k}\left(\frac{m_2 v_0^2}{m_1} - \frac{m_2^2 v_0^2}{m_1^2}\right)}$$

Diese Gleichung lässt sich noch vereinfachen:

$$x_Z = v_0 \sqrt{\frac{m_2}{k}\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)}$$

Wie man sofort sieht gilt diese Gleichung nur für $\frac{m_2}{m_1} \leq 1$ bzw. $m_2 \leq m_1$, weil der Term unter der Wurzel sonst negativ werden würde, was eine komplexe und somit physikalisch unmögliche Lösung zur Folge hätte:

$$\underline{x_Z = x_{max} = v_0 \sqrt{\frac{m_2}{k}\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)} \qquad \text{für } m_2 \leq m_1} \tag{2.21}$$

2.1.4 Zeitpunkt der maximalen Stauchung 2

Nun stellt sich natürlich die Frage, warum Gleichung (2.21) lediglich für $m_2 \leq m_1$ gilt. Gesamtenergie und Gesamtdrehimpuls bleiben auf jeden Fall erhalten; daran kann es also nicht liegen. Aber die Annahme, dass die Geschwindigkeit v_2 der Masse m_2 irgendwann 0 werden müsse, könnte falsch sein. Wenn jedoch die Feder und mit ihr m_2 schwingen, muss v_2 irgendwann 0 werden, da ansonsten kein Übergang von negativer zu positiver Beschleunigung möglich wäre. Die einzige Lösung des Problems liegt also darin, dass bei $m_2 > m_1$ die Feder und mit ihr die Masse m_2 und die Scheibe m_1 nicht schwingen !

Zunächst verwundert dieses Ergebnis natürlich sehr. Zum Verständnis des Vorgangs überlege man sich folgendes: Eine sehr schwere Masse m_2 wird auf eine sehr leichte Scheibe m_1 geschossen. Weil das Trägheitsmoment I_1 von m_1 direkt proportional zu m_1 ist (vgl. Gleichung (2.4)), muss es ebenfalls sehr klein sein. Weil außerdem m_2 sehr groß ist, muss auch das Drehmoment M_2 der Masse m_2 sehr groß sein.[4] D.h. nun, dass die Feder am freien Ende (in der Abbildung der Aufgabenstellung also am linken Ende) sehr stark gedrückt wird und dass sie gleichzeitig aber an dem an der Scheibe befestigten Ende kaum[5] aufgehalten wird sich zu dehnen bzw. sich zu bewegen. Die logische Schlussfolgerung ist, dass die Feder jede Kraft, die auf ihr freies Ende wirkt, unmittelbar an die Scheibe weiter gibt – und zwar fast ohne Stauchung ! Je größer nun das Verhältnis m_2/m_1 ist, desto mehr geht dieses „fast ohne“ über in ein „ohne“. „Ohne Stauchung“ bedeutet jetzt eine Auslenkung der Feder während der gesamten Bewegung[6] von 0 ! Mit Mathematik formuliert gilt also:

$$x_{max} \approx 0 \qquad \text{für } m_2 \gg m_1 \tag{2.22}$$

Dieses Ergebnis lässt sich durch folgende Überlegung noch verfeinern: Man denke sich ein System mit dem Massen-Verhältnis $m_2/m_1 = 1$. Für diesen Fall gilt Gleichung (2.21) noch gerade so. Setzt man $m_2/m_1 = 1$ in Gleichung (2.21) ein, so erhält man für x_{max} 0 ! Das bedeutet, dass x_{max} bereits bei $m_1 = m_2$ 0 ist. Daraus folgt, dass x_{max} auch bei allen Massenverhältnissen $m_2 > m_1$ genau 0 ist. Dies begründet sich dadurch, dass bei $m_2 > m_1$ die Scheibe ja noch leichter gedreht werden kann als bei $m_2 = m_1$. Gleichung (2.22) wird also zu:

$$\underline{x_{max} = 0 \qquad \text{für } m_2 \geq m_1} \tag{2.23}$$

Dieses Ergebnis ist ebenso erstaunlich wie schön. Es zeigt, dass man manchmal durch einfache Anwendung von gesundem Menschenverstand schneller zu seinem Ziel kommen kann, als durch seitenlange mathematische Rechnungen.

2.2 Untersuchung der Bewegung

Bereits in Abschnitt 2.1 wurde die Bewegung der beiden Massen recht ausführlich untersucht und diskutiert. In diesem Abschnitt soll trotzdem noch einmal etwas genauer auf die Bewegung eingegangen werden. Die Untersuchung ist analog zu Abschnitt 2.1 in zwei Fälle unterteilt: $m_1 > m_2$ und $m1 \leq m_2$.

2.2.1 Fall 1: $m_1 > m_2$

In diesem Fall führt das System eine Schwingung aus. Die zeitliche Veränderung der Bewegung, die ja allgemein wegen $\dot{x} = v$ durch die Geschwindigkeit beschrieben wird, sieht im Detail wie folgt aus[7]:

[4] Bei gleich bleibender Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist das Drehmoment umso größer, je schwerer m_2 ist.

[5] Verglichen mit dem Drehmoment am befestigten Ende.

[6] Wie oben bereits erwähnt schwingt die Feder ja nicht, was bedeutet, dass die Auslenkung der Feder während der gesamten Bewegung des Systems immer gleich ist.

[7] Wenn die Feder gestaucht ist, soll ihre Auslenkung x positiv gezählt werden. Wenn die Feder gedehnt ist, ist x dementsprechend negativ. Grund für diese Zählweise ist die Abbildung in der Aufgabenstellung; „nach rechts“ bedeutet also immer positiv.

Anfang — Bevor die Masse m_2 auf die Scheibe auftrifft, ist die *Geschwindigkeit* v_2 der Masse m_2 gleich v_0, wegen den Energiegleichungen also *maximal*, und die *Winkelgeschwindigkeit* ω *der Scheibe ist 0.*

$0 < x < x_{max}$ — m_2 wird von der Feder gebremst, d.h. die Beschleunigung a_2 von m_2 ist negativ, also *nimmt die Geschwindigkeit* v_2 *ab.* Gleichzeitig versucht die Feder die Energie, die sie von m_2 bekommen hat, an die Scheibe weiterzugeben. D.h. die Beschleunigung a_1 der Scheibe m_1 ist positiv, was bedeutet, dass die *Winkelgeschwindigkeit* ω *der Scheibe zunimmt.*

$x = x_{max}$ — Zu diesem Zeitpunkt *ist* v_2 *0*, wie in Abschnitt 2.1 gezeigt wurde. Die *Winkelgeschwindigkeit* ω *der Scheibe ist außerdem maximal*, weil sich wegen $L_2 = m_2 v_2 r = 0$ der gesamte Drehimpuls des Systems in der Scheibe befindet und weil der Drehimpuls L_1 der Scheibe wegen Gleichung (2.9) direkt proportional ist zu ω.

$0 < x < x_{max}$ — Die Feder zieht sich wieder zusammen und beschleunigt dadurch m_2, d.h. die *Geschwindigkeit* v_2 *nimmt wieder zu.* Dies hat zunächst keine Auswirkung auf ω.

$x = 0$ — Die Feder ist für einen kurzen Augenblick in ihrer Ruhelage. Weil m_2 kurz danach wieder gebremst wird, ist v_2 zu genau diesem Zeitpunkt *maximal.* Auch dies hat keinerlei Auswirkung auf ω.

$-x_{max} < x < 0$ — *Die Geschwindigkeit* v_2 *nimmt wieder ab*, weil die Feder sich jetzt wieder in die andere Richtung, also nach rechts, zusammenzieht. Weil gleichzeitig m_2 an der Feder zieht, wird die Scheibe m_1 gebremst. Auf Grund der Beziehung $m_1 > m_2$ ist dieses Bremsen nur recht schwach. Also *nimmt die Geschwindigkeit* ω *der Scheibe leicht ab.*

$x = -x_{max}$ — Jetzt ist die Feder maximal gedehnt. Das bedeutet analog zu Absatz $0 < x < x_{max}$, dass v_2 *0 ist.* Weil die „leichte Abnahme der Geschwindigkeit" (vgl. vorhergehender Absatz) zu diesem Zeitpunkt aufhört, ist *die Geschwindigkeit* ω *der Scheibe minimal.* (Auf die gesamte Bewegung bezogen ist ω eigentlich nicht minimal, weil sie am Anfang ja 0 war. Bezogen auf die schwingende Bewegung alleine, ist ω jedoch schon minimal.)

$-x_{max} < x < 0$ — Die Feder zieht sich wieder zusammen und beschleunigt dadurch m_2, d.h. die *Geschwindigkeit* v_2 *nimmt wieder zu.* Auf ω hat dies zunächst keine Auswirkung.

$x = 0$ — Die Feder ist für einen kurzen Augenblick in ihrer Ruhelage. Weil m_2 kurz danach wieder gebremst wird, ist v_2 zu genau diesem Zeitpunkt *maximal.* Auch dies hat keinerlei Auswirkung auf ω.

$0 < x < x_{max}$ — Dieser Fall wurde bereits oben diskutiert.

Diese zeitliche Abfolge von $0 < x < x_{max}$ zu $0 < x < x_{max}$ wiederholt sich nun also immer wieder – sie ist also periodisch bzw. sinusförmig. Wie genau die Funktion für diesen Ablauf aussehen muss, wird in Abschnitt 4.4.4 gezeigt werden.

2.2.2 Fall 2: $m_1 \leq m_2$

Die Bewegung in diesem Fall wurde bereits in Abschnitt 2.1 recht ausführlich behandelt und diskutiert. Trotzdem soll hier noch einmal analog zu Fall 1 die zeitliche Veränderung der Bewegung kurz aufgezeigt werden:

Anfang — Bevor die Masse m_2 auf die Scheibe auftrifft, ist die *Geschwindigkeit* v_2 der Masse m_2 gleich v_0, wegen den Energiegleichungen also *maximal*, und die *Winkelgeschwindigkeit* ω *der Scheibe ist 0.*

$x = 0$ — Wie am Ende von Abschnitt 2.1 gezeigt, wird die Feder nicht gestaucht. Die Masse m_2 trifft auf die Feder auf und versucht diese zu stauchen. Die Feder weicht jedoch sofort über das andere Ende aus und gibt die Energie, die sie von m_2 erhalten hatte, vollständig an die Scheibe m_1 ab. D.h. die *Geschwindigkeit* v_2 *von* m_2 *nimmt ein klein wenig ab* (wegen $m_1 \leq m_2$ nur „ein klein wenig") und *die Geschwindigkeit* ω *der Scheibe nimmt ein klein wenig zu.*

Laut Abschnitt 2.1 gilt während der gesamten Bewegung $x = 0$. Also sind v_2 und ω während der gesamten Bewegung konstant.

2.3 Winkelgeschwindigkeit der Scheibe

Marcel Schmittfull · Salierstr. 10 · 97505 Geldersheim · marcel-sl@gmx.de

3 Reale Spule

3.1 Originalschaltbild

Um die einzelnen Teilaufgaben lösen zu können, benötigt man zunächst das Originalschaltbild.

Bei einer Serienschaltung A einer Spule L mit einem Widerstand R_L gilt laut [1] für die Phasenverschiebung φ_A:

$$\tan\varphi_A = \frac{\omega L}{R_L} \tag{3.1}$$

Außerdem gilt bei einer Parallelschaltung B einer Spule (L_1, R_{L1}) mit einem Widerstand R für die Phasenverschiebung φ_B:

$$\tan\varphi_B = \frac{R}{\omega L_1} \tag{3.2}$$

Schaltet man nun diese beiden Schaltungen A und B parallel, so ergibt sich folgendes Schaltbild:

Abbildung 3.1: Original-Schaltbild C

Die Phasenverschiebung φ_C dieser Schaltung C lässt sich mit den Gleichungen (3.1) und (3.2) berechnen. Hierzu muss man zunächst die Scheinwiderstände[1] Z_A und Z_B der beiden Schaltungen A und B berechnen. Die Scheinwiderstände sind allgemein gegeben durch:

$$Z_A = \sqrt{R_L^2 + \omega^2 L^2} \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{Z_B} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L_1^2}} \tag{3.4}$$

Den Scheinwiderstand Z_C der Schaltung C ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} Z_C &= \frac{\overbrace{-\omega^2 L L_1 R_1}^{\mathbf{a}} - \mathrm{j}\omega\,\overbrace{R R_1 L_1}^{\mathbf{b}}}{\underbrace{R_1 - \omega^2 L L_1}_{\mathbf{A}} + \mathrm{j}\omega\,\underbrace{\left((R_1 + R)\,L_1 + R_1 L\right)}_{\mathbf{B}}} \qquad (3.5) \\ &= \frac{(a - \mathrm{j}\omega\, b)\,(A - \mathrm{j}\omega\, B)}{A^2 + B^2} \\ &= \frac{(aA - \omega^2\, bB) - \mathrm{j}\omega\,(Ab + aB)}{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis lässt sich in einen Realteil $Z_{C,reel}$ und einen Imaginärteil $Z_{C,img}$ aufspalten:

$$Z_{C,reel} = \frac{aA - \omega^2\, bB}{A^2 B^2} \tag{3.6}$$

$$Z_{C,img} = -\,\mathrm{j}\omega\,\frac{Ab + aB}{A^2 + B^2} \tag{3.7}$$

[1] Auch: Impedanzen

Daraus erhält man nun die Phasenverschiebung φ_C:

$$\tan\varphi_C = \frac{-\omega Ab + aB}{aA - \omega^2 bB} \tag{3.8}$$

Wegen $\tan 90° = \infty$, muss der rechte Term von Gleichung (3.8) ∞ sein, damit eine Phasenverschiebung von 90° erreicht werden kann. Der Term

$$\frac{-\omega Ab + aB}{aA - \omega^2 bB}$$

wird ∞, wenn sein Nenner 0 ist. Also:

$$aA - \omega^2 bB = 0 \tag{3.9}$$

Oder umgestellt:

$$aA = \omega^2 bB \tag{3.10}$$

Bei einer bestimmten Dimensionierung der Schaltung ist Gleichung (3.10) durchaus möglich. Schaltung C stellt also die Originalschaltung dar.

3.2 Ersatzschaltbild

Zunächst hofft man natürlich, dass das gesuchte Ersatzschaltbild eine sehr leicht berechenbare Serienschaltung ist. Dies kann jedoch ausgeschlossen werden, wie folgende Überlegung zeigt: Laut Aufgabenstellung muss das Ersatzschaltbild eine reale Spule (L, R_L) enthalten. Schaltet man nun eine Spule L und einen ohmschen Widerstand R_L in Serie, so bleibt der Strom I gleich und lediglich die Spannung U verändert sich:

Abbildung 3.2: Zeigerdiagramm für Serienschaltung

Aus dieser Zeichnung kann man sofort erkennen, dass der Winkel φ zwischen den Zeigern $\mathcal{I}$ und $\mathcal{U}$ bzw. die Phasenverschiebung φ zwischen Strom I und Klemmenspannung U *immer* kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sein muss, weil weder Spule noch Kondensator einen Zeiger nach „links“ darstellen können, der dann $\mathcal{U}_{\mathcal{RL}}$ ausgleichen würde. Eine einfache Serienschaltung kann also als Lösung ausgeschlossen werden.

Man muss nun also versuchen, den Spannungszeiger $\mathcal{U}$ in Abbildung 3.2 senkrecht auf den Stromzeiger $\mathcal{I}_L$ stehen zu lassen. Hierzu führe mache man folgende geometrischen Überlegungen: So lange $\mathcal{I}$ parallel zur x-Achse bleibt, kann weder eine Spule noch ein Kondensator noch ein ohmscher Widerstand den Spannungszeiger $\mathcal{U}$ nach links oben drehen, d.h. so dass φ $\frac{\pi}{2}$ wird. Also bleibt nichts anderes übrig, als den *Stromzeiger $\mathcal{I}$ ein wenig nach links oben zu drehen.* Denn dann könnte man an diesen nach rechts oben zeigenden Stromzeiger einen *weiteren, nach links oben zeigenden Spannungszeiger antragen*, was zur Folge hätte, dass der Winkel φ zwischen dem Summenzeiger $\mathcal{U}$ aller Spannungszeiger und dem Stromzeiger $\mathcal{I}_L$ $\frac{\pi}{2}$ groß werden könnte.

Nun gilt es, diese einfache geometrische Überlegung in ein Schaltbild umzusetzen. Zunächst muss man den Stromzeiger $\mathcal{I}$ „ein wenig nach links oben drehen“. Um $\mathcal{I}$ verändern zu können, benötigt man in jedem Fall eine Parallelschaltung. Damit der Stromzeiger, der am Ende aus dieser Parallelschaltung „herauskommt“, im Zeigerdiagramm nach rechts oben zeigt, muss die

Parallelschaltung aus einem ohmschen Widerstand R_C und einem Kondensator C bestehen.[2] Das Zeigerdiagramm und die Schaltung sehen nun also wie folgt aus:

Jetzt muss man an den erhaltenen Stromzeiger noch einen „weiteren, nach links oben zeigenden Spannungszeiger antragen“. Ein Spannungszeiger, der dem Stromzeiger vorauseilt (d.h. links von ihm ist) kann nur von einer in Serie geschalteten Spule stammen. Also muss hinter die oben gezeigte Parallschaltung noch eine weitere Spule (L_1, R_{L_1}) geschaltet werden:

Abbildung 3.3: Gesamtes Ersatzschaltbild

Das dazugehörige Zeigerdiagramm ergibt sich zu:

Abbildung 3.4: Zeigerdiagramm zu der Ersatzschaltung

Wie in Abbildung 3.4 zu erkennen ist, ist es egal, ob es sich bei L_1 um eine Spule mit Eisenkern oder um eine reale Spule handelt. Der Spannungszeiger $\mathcal{U}_{R_{L_1}}$ hat keine besondere Auswirkung auf den Gesamt-Spannungszeiger $\mathcal{U}$, weil er zwischen den beiden für $\mathcal{U}$ so wichtigen äußersten Zeigern $\mathcal{U}_{L_1}$ und $\mathcal{U}_{R_L}$ liegt.

Bei einer bestimmten Dimensionierung der einzelnen Teilspannungen und -ströme, ist es nun möglich, dass der Winkel φ in Abbildung 3.4 $\frac{\pi}{2}$ groß wird. Das bedeutet, dass die Phasenverschiebung φ zwischen Klemmenspannung U und Strom durch Spule (L, R_L) bei einer bestimmten Dimensionierung der Schaltung $\frac{\pi}{2}$ betragen könnte.

Anmerkung 1: Die von mir recht häufig verwendeten Bezeichnungen „links“ und „rechts“ können natürlich durch die Fachbegriffe „vorauseilen“ und „hinterhereilen“ ersetzt werden. Mit den Bezeichnungen „links“ und „rechts“ ist es meiner Meinung jedoch wesentlich einfacher dem Leser die geführten Überlegungen verständlich zu erklären.

Anmerkung 2: Dass der Winkel φ in Abbildung 3.4 tatsächlich $\frac{\pi}{2}$ werden kann, zeigt auch die Zeichnung selbst. Sie wurde nämlich mit dem dynamischen Geometrie-Programm „Dynageo Euklid“ erzeugt. Alle Linien wurden nicht einfach willkürlich eingezeichnet, sondern streng geometrisch konstruiert.

3.3 Berechnung des Widerstands

Zur Berechnung des ohmschen Widerstands R_L helfen nun die bereits in Abschnitt 3.1 durchgeführten Überlegungen und Rechnungen. Resubstituiert man Gleichung (3.10), so erhält man:

$$\omega^2 L L_1 R_1(\omega^2 L L_1 - R_L R_1) = \omega^2 - R_L R_1 L_1(L_1(R_1 + R_L) + R_1 L) \tag{3.11}$$

Umstellen ergibt:

$$0 = R_L^2\,(R_1 L_1^2) + R_L\,(L_1^2 R_1^2 - L R_1 + R_L^2 L L_1) + \omega^2(1 - L^2 L_1) \tag{3.12}$$

Mit der Lösungsformel ergibt sich aus Gleichung (3.12) folgende Lösung für R_L:

$$R_{L1/2} = \frac{-R_1 L_1^2 \pm \sqrt{R_1^2 L_1^4 - 4\cdot\omega^2(1 - L^2 L_1)}}{2\,R_1 L_1^2} \tag{3.13}$$

[2]Evtl. sind auch noch weitere Schaltungen möglich, die den Stromzeiger nach links oben verschieben; aber die Lösung mit einem ohmschen Widerstand und einem Kondensator ist auf jeden Fall die einfachste.

Gleichung (3.13) lässt sich noch vereinfachen:

$$\underline{R_{L1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{R_1^2 L_1^4 - 4 \cdot \omega^2 (1 - L^2 L_1)}}{2\,R_1 L_1}} \tag{3.14}$$

3.4 Vergleich zwischen Verlustfaktor und Güte

Extremer Zeitnot wegen konnte ich diese Teilaufgabe leider nicht bearbeiten ...

4 Experimente mit dem Kugelschreiber

Im Folgenden sind die Teilaufgaben jeweils in einen Abschnitt mit einer theoretischen Überlegung und einen Abschnitt mit der experimentellen Ausführung unterteilt. Die verwendeten Hilfsmittel aus Haushalt und Büro werden hervorgehoben.

4.1 Anfangsgeschwindigkeit des Kugelschreibers

4.1.1 Theoretische Überlegung

Allgemein gilt:

$$\text{Translation} \qquad E_{kin} = \frac{1}{2}\, m\, v^2 \tag{4.1}$$

$$\text{Lage} \qquad E_{Lage} = mgh \tag{4.2}$$

Die Lageenergie der Mine im höchsten Punkt ihrer Flugbahn $E_{Lage,oben}$ muss wegen dem Energieerhaltungssatz genau so groß sein wie die Bewegungsenergie am Anfang der Bewegung $E_{kin,unten}$:

$$\begin{aligned} E_{Lage,oben} &= E_{kin,unten} \\ mgh_{max} &= \frac{1}{2}\, m\, v_0^2 \\ \Rightarrow v_0 &= \sqrt{2\, g\, \mathbf{h_{max}}} \end{aligned} \tag{4.3}$$

4.1.2 Experiment 1: Messung der maximalen Höhe

Wegen Gleichung (4.3) muss also lediglich die maximale Höhe der Wurfbahn der Mine h_{max} mit z.B. einem *Zollstock* gemessen werden. Von mir durchgeführte Messungen ergaben folgende Werte:

Messung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h_{max} in m	1,7	1,9	1,6	1,8	1,8	1,9	1,7	1,6	1,7	1,9

h_{max} ist also $\approx 1,9$ m, weil 1,9 der höchste Wert meiner Messungen ist[1].

Für v_0 ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{2\, g\, h_{max}} \\ &= \underline{6,10 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

[1]Es muss der höchste Wert und nicht etwa der Durchschnittswert der Messwerte verwendet werden, weil bei Messungen mit einer Maximalhöhe h_{max} niedrigerer als 1,9 die Feder offenbar nicht vollständig bis zum Anschlag nach unten gedrückt war oder (wahrscheinlicher) beim Loslassen der Mine ein Teil der Bewegungsenergie der Mine auf die Hand übertragen wurde. Je größer h_{max} ist, desto kleiner war der Energieverlust, d.h. desto besser ist das Ergebnis.

4.2 Kraft für maximale Stauchung der Feder

4.2.1 Theoretische Überlegung

Allgemein gilt:

$$F_{Feder} = -Dx \tag{4.4}$$
$$E_{pot,Feder} = \frac{1}{2}\,D\,x^2 \tag{4.5}$$

wobei x die Abweichung der Länge der Feder von der ungedehnten bzw. ungestauchten Länge der Feder und D die Federkonstante darstellt.

Auflösen der Gleichungen (4.4) und (4.5) nach x liefert:

$$x = -\frac{F_{Feder}}{D} \qquad \text{und} \qquad x = \sqrt{2\,\frac{E_{pot,Feder}}{D}}$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{F_{Feder}}{D} = \sqrt{2\,\frac{E_{pot,Feder}}{D}}$$

Für F_{Feder} ergibt sich:

$$F_{Feder} = -D\sqrt{2\,\frac{E_{pot,Feder}}{D}} \tag{4.6}$$

In Abschnitt 4.1 wurde die Feder bis zum Anschlag, d.h. ganz, zusammengedrückt. Die potentielle Energie der Feder ist zu diesem Zeitpunkt maximal. Wegen dem Energieerhaltungssatz muss diese maximale potentielle Energie $E_{pot,Feder}$ der Feder gleich der maximalen Bewegungsenergie der Mine $E_{kin,unten}$ und gleich der maximalen Lageenergie der Mine $E_{Lage,oben}$ sein:

$$\begin{aligned} E_{pot,Feder} &= E_{kin,unten} = E_{Lage,oben} \\ &= \mathbf{m}\,g\,h_{max} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in Gleichung (4.7) erhält man für F_{Feder}:

$$F_{Feder} = -D\sqrt{2\,\frac{\mathbf{m}\,g\,h_{max}}{D}} \tag{4.7}$$

4.2.2 Experiment 2: Messung der Masse der Mine

In Gleichung (4.7) sind die maximale Höhe h_{max} und die Federkonstante D aus Abschnitt 4.1 bzw. 4.3 bekannt. D.h. die einzige noch unbekannte Variable von Gleichung (4.7) ist die Masse der Mine m.

Zunächst wird das in Abschnitt 4.4.2 beschriebene Experiment aufgebaut[2]. Der Kugelschreiber kann jetzt als Wage verwendet werden, indem an beiden Enden des Kugelschreibers entweder jeweils ein *Kartonkärtchen* oder ein *kleines Körbchen*, z.B. von einer *„Snack Cocktail Knabbergebäck"-Verpackung*, mit *Klebeband* befestigt wird. Hierbei ist darauf zu achten,

Abbildung 4.1: Aufbau der „Kugelschreiber-Wage“

dass der Abstand der Befestigung auf beiden Seiten gleich weit vom Schwerpunkt des Kugelschreibers entfernt sein muss, dass exakt dieselben Gegenstände an beiden Enden angebracht werden und dass die Längen der Bindfaden an denen die Körbchen hängen gleich groß sind.[3]

Nun legt man in das eine Körbchen die Kugelschreiber-Mine, deren Masse ja gemessen werden soll. Sofort schlägt die Wage aus. Um diesen Ausschlag wieder auszugleichen müssen irgendwelche Gewichte in das andere Körbchen gelegt werden. Diese Gewichte müssen nun die Eigenschaften haben, dass ihre Massen sehr genau bekannt sind und dass sie sehr leicht in Bruchteile ihrer eigentlichen Form unterteilt werden können. Hierfür eignen sich *DIN-A4-Bogen Papier* ideal. Die Masse eines einzelnen DIN-A4-Bogen Bogens Papier lässt sich wie folgt berechnen: Auf der Verpackung von dem jeweiligen Papier steht üblicherweise so etwas wie „50 g/m²“ oder „90 g/m²“. Dieser Wert steht für die Qualität des Papiers; je größer er ist, desto hochwertiger ist das Papier. Auf der Verpackung des von mir verwendeten Papiers steht der Wert „80 g/m²“. Die Masse m_{Blatt} eines einzelnen Bogens Papier erhält man mit den Seitenlängen 210 mm und 297 mm eines DIN-A4-Blattes:

$$\begin{aligned} m_{Blatt} &= 80\,\mathrm{g/m^2} \cdot 210\,\mathrm{mm} \cdot 297\,\mathrm{mm} \\ &= 4.9392\,\mathrm{g} \\ &\approx 5,0\,\mathrm{g} \end{aligned}$$

Mit einer *Schere* lässt sich der Bogen sehr leicht halbieren[4]. Durch mehrmaliges Halbieren erhält man immer kleinere Bruchteile des Bogens und somit immer kleinere Gewichte. Es ist sehr hilfreich die erhaltenen Bruchteile mit $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ ... zu beschriften. Man legt nun also einige Bruchteile des Bogens in den noch leeren Korb, bis sich die Wage etwa im Gleichgewicht befindet, d.h. bis der Kugelschreiber etwa parallel zum Himmelshorizont steht. Jetzt ersetzt man größere Bruchteile durch kleinere Bruchteile, wodurch sich die Wage immer besser dem Gleichgewicht nähert. Wenn man der Meinung ist, dass sich die Wage nun im Gleichgewicht befindet, also dass die Masse der Mine gleich der Masse der Papier-Schnitzel ist, nimmt man die Papier-Schnitzel aus dem Körbchen heraus und zählt die auf den Papier-Schnitzel stehenden Bruchteile zusammen. Multipliziert man diese Summe mit der Masse des DIN-A4-Bogens 5,0 g, so erhält man die Masse der Mine.

Von mir durchgeführte Messungen ergaben, dass 5 $\frac{1}{32}$-Papierschnitzel genauso schwer sind wie die von mir verwendete Mine:

$$\begin{aligned} m &= \frac{5}{32} \cdot 5,0\ \mathrm{g} \\ &\approx \underline{0,78\ \mathrm{g}} \end{aligned}$$

[2]Der untere Bindfaden darf hier weggelassen werden.

[3]Wäre dies nicht der Fall, so würde der Kugelschreiber keine funktionierende Wage darstellen.

[4]Man faltet den Bogen normal zur längeren Seite des Bogens und schneidet den Bogen entlang der entstandenen Linie auseinander.

4.3 Federkonstante

4.3.1 Theoretische Überlegung

Durch Auflösen der Energiegleichung für die Feder bei maximaler Stauchung $E_{pot,max} = \frac{1}{2}\,Dx_{max}^2$ nach D erhält man:

$$D = \frac{E_{pot,max}}{x_{max}^2} \tag{4.8}$$

Die maximale potentielle Energie der Feder $E_{pot,max}$ ist laut Abschnitt 4.2 mgh_{max}, wobei m laut Experiment 4.2.2 $0,78$ g beträgt und h_{max} laut Experiment 4.1.2 $1,9$ m groß ist. Für $E_{pot,max}$ ergibt sich also:

$$\begin{aligned} E_{pot,max} &= 0,78 \text{ g} \cdot 9,8 \text{ N/kg} \cdot 1,9 \text{ m} \\ &\approx 14,5 \text{ mJ} \end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert nun in Gleichung (4.8) ein, ergibt sich für die gesuchte Federkonstante D:

$$D = \frac{14,5 \text{ mJ}}{\mathbf{x_{max}^2}} \tag{4.9}$$

4.3.2 Experiment 3: Messung der maximalen Stauchung der Feder

Wegen Gleichung (4.9) muss zur Bestimmung der Federkonstanten D lediglich noch die maximale Stauchung der Feder x_{max} gemessen werden. x_{max} ist die Länge, die man erhält, wenn man die Gesamtlänge der Feder in Ruhelage[5] l_{Ruhe} von der Länge der Feder bei maximaler Stauchung $l_{gestaucht,max}$ abzieht[6]:

$$x_{max} = l_{gestaucht,max} - l_{Ruhe} \tag{4.10}$$

Da es sehr schwierig ist die Feder mit der Hand alleine zusammenzudrücken, wird die Feder wieder auf die Mine gesteckt und die Mine mit der Feder wird in den oberen Teil des Kugelschreibers eingesetzt[7]. Jetzt misst man die Länge dieses erhaltenen Teiles $l_{Teil,Ruhe}$, drückt die Mine danach bis zum Anschlag und misst hierauf wieder die Länge $l_{Teil,gestaucht,max}$. Nach Gleichung (4.10) erhält man für x_{max}:

$$x_{max} = l_{Teil,gestaucht,max} - l_{Teil,Ruhe}$$

Von mir durchgeführte Messungen ergaben:

$$\begin{aligned} l_{Teil,gestaucht,max} &= 115 \text{ mm} \\ l_{gestaucht,max} &= 98 \text{ mm} \end{aligned}$$

Einsetzen in obige Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} x_{max} &= 98 \text{ mm} - 115 \text{ mm} \\ &= -17 \text{ mm} \end{aligned}$$

[5] D.h. die Feder ist weder gedehnt noch gestaucht.

[6] Es muss $l_{gestaucht,max} - l_{Ruhe}$ (und nicht $l_{Ruhe} - l_{gestaucht,max}$) heißen, weil per Konvention die Differenz x der beiden Längen bei einer Stauchung negativ ist. D.h. dass nach oben positiv und nach unten negativ gezählt wird. Dies wird später bei der Berechnung der Kraft wieder von Bedeutung sein.

[7] Weil bei der Berechnung von x_{max} die Differenz der beiden gemessenen Längen gebildet wird, ist es für die Messung vollkommen gleichgültig, ob an die Feder noch eine Verlängerung angebracht wird oder nicht.

Marcel Schmittfull · Salierstr. 10 · 97505 Geldersheim · marcel-sl@gmx.de

Durch Einsetzen dieses Wertes in Gleichung (4.9) erhält man:

$$\begin{aligned} D &= \frac{14,5 \text{ mJ}}{(-17 \text{ mm})^2} \\ &\approx \underline{50 \text{ N/m}} \end{aligned}$$

4.4 Trägheitsmoment des Kugelschreibers

4.4.1 Theoretische Lösungsidee

Die Lösungsidee besteht darin, den Kugelschreiber um eine Schwerpunktachse senkrecht zu seiner Lage drehen zu lassen und dabei die Winkelgeschwindigkeit ω zu messen. Die Rotationsenergie des Kugelschreibers E_{rot} beträgt

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \, \omega^2 \tag{4.11}$$

wobei I das Trägheitsmoment des Kugelschreibers um eine Schwerpunktachse senkrecht zu seiner Lage darstellt. Wenn nun sowohl die Winkelgeschwindigkeit ω als auch die Rotationsenergie E_{rot} bekannt sind, kann Gleichung (4.11) nach I umgestellt werden:

$$I = 2 \, \frac{E_{rot}}{\omega^2} \tag{4.12}$$

In Abschnitt 4.4.4 wird gezeigt, wie man die Winkelgeschwindigkeit ω messen kann. In Abschnitt 4.4.3 wird gezeigt, wie man E_{rot} bestimmen kann.

4.4.2 Aufbau des Experimentes

Drehung des Kugelschreibers

Zunächst stellt sich das Problem, den Kugelschreiber um eine Schwerpunktachse senkrecht zu seiner Lage drehen zu lassen. Dies wird erreicht, indem man mit *Klebeband* zwei *Bindfaden* am Kugelschreiber wie folgt befestigt:

Abbildung 4.2: Befestigung der Bindfaden am Kugelschreiber

Den Schwerpunkt M erhält man im Normalfall durch Abmessen (*Lineal*) der halben Länge des Kugelschreibers. Sollte die Verteilung der Masse jedoch nicht gleichmäßig sein, so findet man den Schwerpunkt indem man den Kugelschreiber zunächst an einem Ende frei aufhängt und eine Senkrechte zum Himmelshorizont auf den Kugelschreiber zeichnet. Danach nimmt man das andere Ende und zeichnet wieder die Senkrechte zum Himmelshorizont auf. Der Schnittpunkt der beiden Senkrechten ist nun der gesuchte Schwerpunkt M.

Jetzt werden die Enden der beiden Bindfaden wie folgt mit *Klebeband* befestigt:

Abbildung 4.3: Befestigung der Bindfaden am Boden und an einer Kante

Das eine Ende wird also an einer festen Kante, z.B. der eines *Schreibtisches*, befestigt; das andere wird mit einem nicht zu leichten kleinen Gegenstand, z.B. einer *Armbanduhr* oder einem *Geldbeutel*, verbunden. Damit der Kugelschreiber später neben der Rotation nicht noch eine Translation ausführt, muss der Gegenstand am unteren Ende fixiert sein, d.h. z.B. auf dem Boden oder auf ein paar *Büchern* stehen. Würde man jetzt den Kugelschreiber anstoßen, so würde er sich nahezu ohne irgendeine Verlangsamung[8] um eine Schwerpunktachse senkrecht zu seiner Lage drehen.

4.4.3 Rotationsenergie

Das nächste Problem besteht darin, eine messbare Energie auf den Kugelschreiber zu übertragen. Hier hilft die Kugelschreiberfeder weiter, weil ihre potentielle Energie E_{pot} bei maximaler Stauchung x_{max} bereits aus Abschnitt 4.1 bekannt ist. D.h. dass die Feder aus dem Kugelschreiber herausgenommen werden muss, bevor dieser mit den Bindfaden verbunden wird. Als Ausgleich benötigen wir einen weiteren *Kugelschreiber* K_2. Die Feder von K_2 wird nun in den eigentlichen Kugelschreiber K_1 eingesetzt, wodurch K_1 wieder vollständig ist. Danach wird mit der Spitze von K_2 und der Feder von K_1 die Mine von K_2 auf ein Ende des eigentlichen Kugelschreibers K_1 geschossen:

Abbildung 4.4: Schuss auf den Kugelschreiber

Wenn wie in der Abbildung gezeigt an die Spitze der Kugelschreiberspitze ein *Kartonkärtchen* geklebt wird, geht die kinetische Energie der Mine E_{kin} beinahe verlustfrei über in Rotationsenergie des Kugelschreibers K_1 E_{rot}. Da ja die kinetische Energie der Mine nach dem Schuss E_{kin} gleich der potentiellen Energie der Feder vor dem Schuss E_{pot} ist, gilt:

$$E_{rot_{K_1}} = E_{kin_{Mine}} = E_{pot_{Feder}} \tag{4.13}$$

Bei maximaler Stauchung $x_{max} = -17\,\mathrm{mm}$ erhält man für $E_{rot_{K_1}}$:

$$\begin{aligned} E_{rot_{K_1}} &= E_{pot_{Feder}} \\ &= \frac{1}{2} D x_{max}^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 50\,\mathrm{N/m} \cdot (-17)^2\,\mathrm{mm}^2 \\ &\approx 7,2\,\mathrm{mJ} \end{aligned} \tag{4.14}$$

4.4.4 Winkelgeschwindigkeit

Um die Winkelgeschwindigkeit des Kugelschreibers ω zu messen, schießt man die Mine von K_2 wie in Abschnitt 4.4.3 beschrieben auf den Kugelschreiber K_1, so dass sich K_1 dreht. ω erhält man, indem man zählt, wie viele Umdrehungen K_1 in einer bestimmten Zeit durchführt. Dabei sollte jedoch die Zeit, in der die Umdrehungen gezählt werden, nicht zu groß gewählt werden, weil ω nach einer gewissen Zeit kleiner wird[9]. Angemessen sind meiner Meinung nach ungefähr fünf Sekunden.

Anmerkung: Es ist möglich, dass sich der Kugelschreiber sehr schnell dreht und das Zählen der Umdrehungen deshalb womöglich Probleme hervorrufen könnte. In diesem Fall ist es sehr hilfreich, ein Ende des Kugelschreibers farbig zu markieren (z.B. mit einem „Edding“) und dieses farbige Ende mit dem Auge zu fixieren. Dann sollte das Zählen keinerlei Probleme mehr bereiten.

[8] Die einzige Verlangsamung wird vom Drehen der Bindfaden hervorgerufen. Je mehr die Bindfaden „aufgedreht“ werden, desto mehr versuchen sie, wieder in ihre ursprüngliche Position zurückzudrehen. Bei den ersten wenigen Drehungen ist dieser Effekt jedoch vernachlässigbar.

[9] Die Bindfaden werden „aufgedreht“, vgl. Abschnitt 4.4.2.

4.4.5 Messwerte und Auswertung

Die einzige noch unbekannte Variable aus den vorhergehenden Abschnitten ist die Winkelgeschwindigkeit des Kugelschreibers ω. Durch die oben beschriebene Vorgehensweise habe ich folgende Reihe von Messwerten erhalten:

Messung	1	2	3	4	5	6	7	8
ω in U/5s	8,5	10,5	9	11	9,5	10	10,5	9

Die größte[10] gemessene Winkelgeschwindigkeit ω ist $\frac{11\,\mathrm{U}}{5\,\mathrm{sec}} = 4,4\,\pi$ rad/ sec. Setzt man dieses Ergebnis und Gleichung (4.14) nun in Gleichung (4.12) ein, so erhält man für das Trägheitsmoment I:

$$\begin{aligned} I &= 2\,\frac{E_{rot}}{\omega^2} \\ &= \frac{2 \cdot 7,2\,\mathrm{mJ}}{4,4\pi\ \mathrm{rad/\,sec}} \\ &\approx \underline{7,5\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{dm}^2} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Dieses Ergebnis kann man jetzt noch mit einer Formel[11] prüfen, die allgemein das Trägheitsmoment eines dünnen Stabes bei einer Drehachse durch den Mittelpunkt senkrecht zur Körperachse angibt:

$$I = \frac{1}{12}\,m_{ges} l^2 \tag{4.16}$$

wobei l die Länge des Stabes bezeichnet. Mit $I = 75\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{dm}^2$ und $l = 13,2\,\mathrm{cm}$ erhält man aus Gleichung (4.16):

$$m_{ges} \approx 52\,\mathrm{g}$$

Der Kugelschreiber müsste also etwa 50 g schwer sein. Diese Größenordnung ist bei meinem Kugelschreiber auf jeden Fall sehr realistisch und unterstreicht die Richtigkeit der Lösung.

[10] Analog zur Fußnote am Ende von Abschnitt 4.1.1 muss auch hier der größte gemessene Wert verwendet werden.
[11] Siehe [2], Seite 231.

Marcel Schmittfull · Salierstr. 10 · 97505 Geldersheim · marcel-sl@gmx.de

A Hinweis zu den Abbildungen

Leider habe ich es zeitlich nicht geschafft, alle Grafiken dieser Arbeit noch rechtzeitig vor Abgabetermin am Computer zu erstellen. Aus diesem Grund habe ich die Abbildungen mit der Hand angefertigt. Das Blatt mit den Zeichnungen befindet sich am Ende der vorliegenden Arbeit in Abschnitt B.

Marcel Schmittfull · Salierstr. 10 · 97505 Geldersheim · marcel-sl@gmx.de

B Abbildungen

Literatur

[1] Fricke, Hans: Leitfaden der Elektrotechnik - Band I Grundlagen der Elektrotechnik, B.G. Teubner, Stuttgart 1982

[2] Tipler, Paul A.: Physik, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1994

Marcel Schmittfull · Salierstr. 10 · 97505 Geldersheim · marcel-sl@gmx.de