43. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 11-13

Lösungen von Marcel Schmittfull

Oktober 2003

Name	Marcel Schmittfull
Adresse	Salierstr. 10
	97505 Geldersheim
Telefon	(0 97 21) 8 27 27
e-Mail	marcel-sl@gmx.de
Geb.datum	10.08.1987
Klasse	11a

Schule	Celtis Gymnasium
Adresse	Gymnasiumstr. 15
	97421 Schweinfurt
Telefon	(0 97 21) 67 50 60

431311 Essen

Weil eine ungerade positive Zahl immer die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl und niemals zweier gerader Zahlen ist, folgt aus

$$43 = E + S + S + E + N = 2(E + S) + N, \tag{1.1}$$

dass N ungerade ist. Weil E und S zwei unterschiedliche positive ganze Zahlen sein müssen, erhält man den größtmöglichen Wert für N, indem man für E und S die kleinstmöglichen Werte, also 1 und 2, in Gleichung (1.1) einsetzt. Dies führt zu $N_{max} = 37$. Also ist $N = \{1, 3, 5, \ldots, 37\}$ bzw. $N = 2k + 1$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, 18$.

Aus Gleichung (1.1) folgt $E + S = \frac{1}{2}(43 - N)$. Weil E und S beide positive ganze Zahlen sind, kann E genau $\frac{1}{2}(43 - N) - 1$ mögliche Werte annehmen, nämlich $E = \{1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}(43 - N) - 1\}$. Jedem E kann genau ein $S = \frac{1}{2}(43 - N) - E$ zugeordnet werden. Es gibt also $\frac{1}{2}(43 - N) - 1$ (E, S)-Paare für jedes N. Dies führt mit $N = 2k + 1$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, 18$ zu der Anzahl der möglichen (E, S, N)-Tripel

$$\begin{aligned} M &= \sum_{k=0}^{18} \frac{[43 - (2k + 1)]}{2} - 1 \\ &= 380 - \sum_{k=0}^{18} k = 380 - \frac{18 \cdot 19}{2} = 209. \end{aligned}$$

Hiervon müssen jedoch noch all die Tripel weggenommen werden, für die E, S und N nicht 3 verschiedene Zahlen darstellen. Für $E = S = N$ wird Gleichung (1.1) zu $E = S = N = 43 : 5 \notin \mathbb{N}$, d.h. es existiert kein Tripel mit $E = S = N$. Nun müssen noch die Fälle $E = S$, $E = N$ und $N = S$ betrachtet werden.

- $\mathbf{E = S}$ Wenn $E + S = \frac{1}{2}(43 - N)$ gerade ist, existiert genau ein (E, S)-Paar, in dem $E = S$, nämlich wenn $E = S = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(43 - N)]$. Wenn $E + S = \frac{1}{2}(43 - N)$ ungerade ist, liefert der Ausdruck $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(43 - N)]$ keine ganze Zahl, d.h. es gibt kein (E, S)-Paar, in dem $E = S$. Folglich muss für alle geraden $\frac{1}{2}(43 - N)$ ein Paar, d.h. eine Möglichkeit, abgezogen werden. Aus $\frac{1}{2}(43 - N) = 2c$ für $c \in \mathbb{N}$ folgt $43 - N = 4c$. Weil $N \leq 37$, entsteht das erste wegzunehmende Paar bei $4c = 43 - N = 43 - 35 = 8$. Ebenso wird noch für $4c = \{12, 16, 20, ..., 40\}$ bzw. $c = \{3, 4, 5, \ldots, 10\}$ jeweils eine Möglichkeit abgezogen. Insgesamt fallen also 9 Möglichkeiten weg, sodass $M = 209 - 9 = 200$.

- $\mathbf{E = N}$ Angenommen $E = N$, dann ist $S = \frac{1}{2}(43 - 3N)$. Aus $\frac{1}{2}(43 - 3N) = S > 0$ folgt $N < (43 - 2) : 3 = 13\frac{2}{3}$. Für $N = \{1, 3, 5, \ldots, 13\}$ ist also $N = E$, weshalb für jedes $N = \{1, 3, 5, \ldots, 13\}$ jeweils 1 Tripel von M subtrahiert werden muss, d.h. $M = 200 - 7 = 193$.

- $\mathbf{N = S}$ Aus $N = S$ folgt $E = \frac{1}{2}(43 - 3N)$. Analog zum Fall $N = E$ wird für $N = \{1, 3, 5, \ldots, 13\}$ $N = S$, weshalb noch einmal für alle $N = \{1, 3, 5, \ldots, 13\}$ jeweils 1 Tripel weggenommen werden muss, also $M = 193 - 7 = 186$.

Also gibt es genau 186 mögliche $(\mathbf{E}, \mathbf{S}, \mathbf{N})$-Tripel.

Anmerkung: Die Anzahl der Möglichkeiten lässt sich auch mit dem Computer ermitteln. Hierzu werden einfach alle Möglichkeiten durchprobiert und abgezählt. Der Code lautet wie folgt:

```
// Zähler
count = 1;
// Schleife über alle E=1,2,3,...,19
for (e=1; e<20; e++) {
    // Schleife über alle S=1,2,3,...,19
    for (s=1; s<20; s++) {
        // Berechnung von N
        n = 43-2*e-2*s;
        // Wenn alle Aussagen N>0, N=1mod2,
        // N!=E, N!=S, E!=S wahr sind...
        if (n>0 && n%2==1 && n!=e && n!=s && e!=s) {
            // ...inkrementiere den Zähler um 1.
            count++;
        }
    }
}
```

Als Ergebnis erhält man `count=186`, also ebenso wie oben genau 186 Möglichkeiten.

431312 Königreich

Weil jeder Ritter genau 3 Feinde hat, muss auf jeden Fall $N \geq 4$ sein.

- Ist $N = 4$, so hat jeder Ritter 3 Feinde und keinen Freund und es gibt folgende Lösung für ein mögliches Königreich:

Ritter	Feinde	Freunde
A	B,C,D	
B	A,C,D	
C	A,B,D	
D	A,B,C	

- Wenn $N = 5$, bildet jeder Ritter mit 3 Rittern ein Feinde- und mit 1 Ritter ein Freundepaar. Weil ein *Paar* aus Freunden immer aus 2 Rittern besteht, bleibt bei $N = 5$ ein Ritter übrig, der keinen Freund hat. Es ist also kein Königreich möglich.

- Für $N = 6$ ist ein Königreich möglich, das in die beiden Lager (A, B, C) und (D, E, F) gespalten ist:

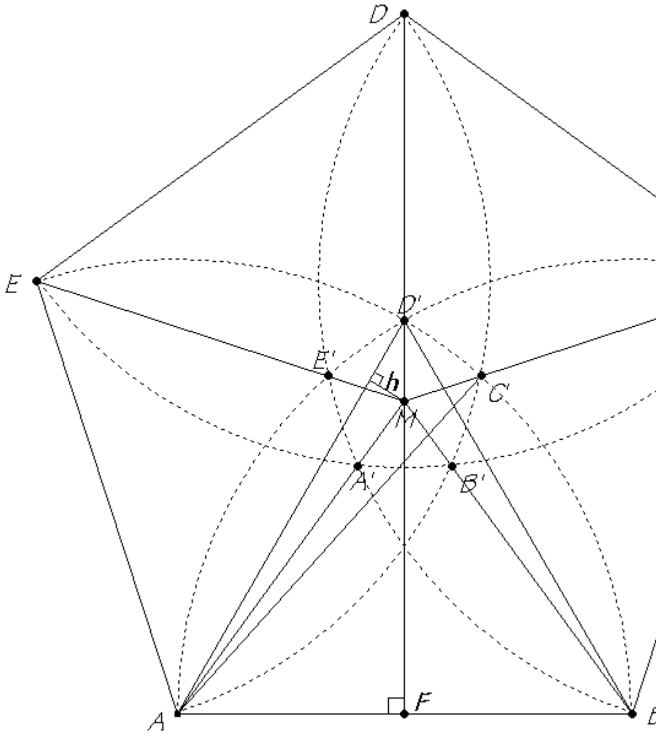
Ritter	Feinde	Freunde
A	D,E,F	B,C
B	D,E,F	A,C
C	D,E,F	A,B
D	A,B,C	E,F
E	A,B,C	D,F
F	A,B,C	D,E

- Schließlich wird der Fall $N > 6$ betrachtet. Der Ritter R ist weder Feind noch Freund von sich selbst. Wenn er also mit 3 anderen Rittern ein Feinde-Paar bildet, bleiben ihm noch $N - 4$ Freunde. Wenn der Ritter R mit den 3 Rittern F_1, F_2, F_3 ein Feinde-Paar bildet, müssen alle seine $N-4$ Freunde auch genau mit diesen 3 Rittern F_1, F_2, F_3 ein Feinde-Paar bilden, da jeder von R's Freunden ebenfalls genau 3 Feinde haben muss und der Ritter R jeden Feind seiner Freunde auch zum Feind haben muss. Also bildet jeder der $N-4$ Freunde von R und R selbst ein Feinde-Paar mit den Rittern F_1, F_2, F_3. Dann bilden die Ritter F_1, F_2, F_3 mit mindestens $N - 3$ anderen Rittern ein Feinde-Paar. Dies führt für $N > 6$ zu einem Widerspruch, weil jeder Ritter mit genau 3 Rittern ein Feinde-Paar bilden muss.

Ein Königreich ist also nur für N = 4 und N = 6 möglich.

431313 Fünfeck

Die gesuchte Fläche $A_?$ erhält man, indem man von der Fläche A_1 des regelmäßgigen Fünfecks $ABCDE$ die kleine Fläche A_2 des „Fünfecks mit runden Seiten“ in der Mitte subtrahiert, $A_? = A_1 - A_2$. Folgende Skizze diene der Anschaulichkeit der Lösung:



Um den Flächeninhalt eines regelmäßigen Fünfecks mit Seitenlänge a zu berechnen, wird zunächst der Mittelpunkt M des Fünfecks als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten über die Fünfeckseiten konstruiert. Anschließend werden die Eckpunkte des Fünfecks mit M verbunden. Weil $\overline{AM}$ den Winkel $\angle BAE$ halbiert, dessen Wert als Innenwinkel im regelmäßigen Fünfeck $108°$ beträgt, gilt $\angle BAM = \angle FAM = 108° : 2 = 54°$. Folglich ist $\overline{FM} = \overline{AF} \cdot \tan \angle FAM = \frac{a}{2} \cdot \tan 54°$. Somit ergibt sich für den Flächeninhalt von $\triangle ABM$

$$A(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{FM} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \tan 54° = \frac{a^2}{4} \tan 54°.$$

Weil $\triangle ABM \triangleq \triangle BCM \triangleq \triangle CDM \triangleq \triangle DEM \triangleq \triangle EAM$ (regelmäßiges Fünfeck), ist die Fläche A_1 des Fünfecks $ABCDE$

$$A_1 = 5 \cdot A(\triangle ABM) = \frac{5}{4} a^2 \tan 54°.$$

Um die in der Mitte des Fünfecks $ABCDE$ auszuschneidende Fläche A_2 zu berechnen, werden die Schnittpunkte der Eckpunkt-Mittelpunkt-Verbindungen[1] mit den Kreisbogen um die Eckpunkte $ABCDE$ mit Radius a A', B', C', D' und E' genannt (vgl. Skizze). Zeichnet man die Strecken $[AD']$ und $[BD']$ ein, so wird ersichtlich, dass das Dreieck $\triangle ABD'$ gleichseitig ist ($\overline{AD'} = \overline{BD'} = \overline{AB} = a$)

[1]Gemeint sind die Strecken $[AM]$, $[BM]$, $[CM]$, $[DM]$ und $[EM]$.

und somit $\angle BAD' = 60°$. Folglich ist der Winkel $\angle MAD' = \angle BAD' - \angle BAM = 6°$. Weil AM den Winkel $\angle C'AD'$ halbiert, ist $\angle C'AD' = 2 \cdot \angle MAD' = 12°$. Daraus folgt der Flächeninhalt des Kreissektors

$$A(C'AD') = \pi a^2 \cdot \frac{12°}{360°} = \frac{\pi}{30}\, a^2.$$

Um die Fläche $A(C'MD') = \frac{1}{5}A_2$ zu berechnen, wird von der Sektorfläche $A(C'AD')$ die doppelte Fläche des Dreiecks $\triangle AMD'$ subtrahiert, $A(C'MD') = \frac{1}{5}A_2 = A(C'AD') - 2 \cdot A(\triangle AMD')$. Um diese Fläche $A(\triangle AMD')$ zu berechnen, wird zunächst die Senkrechte auf AD' durch M gezogen, die die Höhe h im Dreieck $\triangle AMD'$ darstellt. Diese Höhe ist

$$h = \overline{AM} \cdot \sin \angle MAD' = \frac{\overline{AF}}{\cos \angle FAM} \cdot \sin 6° = \frac{a \sin 6°}{2 \cos 54°}.$$

Folglich erhält man für die Fläche $A(\triangle AMD')$

$$A(\triangle AMD') = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \overline{AD'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \sin 6°}{2 \cos 54°} \cdot a = \frac{\sin 6°}{4 \cos 54°}\, a^2.$$

Die Fläche $A(C'MD')$ ist

$$A(C'MD') = \frac{1}{5}A_2 = A(C'AD') - 2 \cdot A(\triangle AMD') = \frac{\pi}{30}\, a^2 - 2 \cdot \frac{\sin 6°}{4 \cos 54°}\, a^2 = \left(\frac{\pi}{30} - \frac{\sin 6°}{2 \cos 54°}\right) a^2$$

und demnach ergibt sich für die Fläche A_2 des kleinen Fünfecks in der Mitte

$$A_2 = 5 \cdot \left(\frac{\pi}{30} - \frac{\sin 6°}{2 \cos 54°}\right) a^2.$$

Daraus folgt für die gesuchte Fläche $A_?$

$$\begin{aligned} A_? &= A_1 - A_2 \\ &= \frac{5}{4}\, a^2 \tan 54° - 5a^2 \cdot \left(\frac{\pi}{30} - \frac{\sin 6°}{2 \cos 54°}\right) \\ &= 5a^2 \cdot \left(\frac{\tan 54°}{4} - \frac{\pi}{30} + \frac{\sin 6°}{2 \cos 54°}\right) \\ &\approx 1{,}641\, a^2. \end{aligned}$$

431314 Kartenspiel

Für $n = 1, 2, 3$ gewinnt Anna auf jeden Fall, weil sie sofort alle Karten aufdecken kann. Für $n > 3$ muss Anna mit einer Strategie spielen. Der erste Zug von Anna besteht darin, dass sie wenn n ungerade ist, die mittlere Karte[1] der Kartenreihe oder wenn n gerade ist, die beiden mittleren Karten[2] der Kartenreihe aufdeckt. Hierdurch wird die Kartenreihe in ihrer Mitte getrennt, sodass zwei gleich große Gruppen mit verdeckten Karten entstehen. Weil sich die eine bzw. die beiden aufgedeckten Karten genau in der Mitte der Reihe befinden, gilt

$$a_i = a_{n+1-i} \qquad \text{für } i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

wobei $a_x = 0$ für aufgedeckte und $a_x = 1$ für verdeckte Karten steht.

Nun werden alle folgenden Züge als Doppelzüge betrachtet, in denen jeweils Beate den ersten und Anna den zweiten Zug hat. Beate deckt die Karte a_m oder die Karten $(a_m,\, a_{m+1})$ oder die Karten $(a_m,\, a_{m+1},\, a_{m+2})$ auf. Anna verwendet für ihren Gegenzug folgenden *Spiegel*-Algorithmus[3][4]:

Beate	Anna
$a_m \leftarrow 0$	$a_{n+1-m} \leftarrow 0$
$(a_m,\, a_{m+1}) \leftarrow 0$	$(a_{n+1-m},\, a_{n-m}) \leftarrow 0$
$(a_m,\, a_{m+1},\, a_{m+2}) \leftarrow 0$	$(a_{n+1-m},\, a_{n-m},\, a_{n-m-1}) \leftarrow 0$

D.h. Anna deckt immer die Karte a_{n+1-i} auf, wenn Beate zuvor die Karte a_i aufgedeckt hat. Somit gilt nach jedem Doppelzug wieder

$$a_i = a_{n+1-i} \qquad \text{für } i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Wenn nun nach einem solchen Doppelzug, in dem Beate immer den ersten und Anna immer den zweiten Zug hat, ein $a_x = 1$, so ist auch $a_{n+1-x} = 1$ und Beate ist wieder am Zug mit mindestens zwei nichtnebeneinanderliegenden verdeckten Karten[5] $a_x = a_{n+1-x} = 1$ — sie kann also in ihrem nächsten Zug nicht gewinnen und es kommt zu einem weiteren Doppelzug. Wenn jedoch $a_x = 0$ für alle $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ bzw. $\sum_{x=1}^{n} a_x = 0$, ist das Spiel beendet und Anna hat gewonnen, weil sie den zweiten Zug im Doppelzug hatte und somit durch ihren Zug auf $\sum_{x=1}^{n} a_x = 0$ gekommen ist.

Der beschriebene *Spiegel*-Algorithmus terminiert immer, weil n endlich ist und mit jedem Zug die Anzahl der verdeckten Karten $\sum_{x=1}^{n} a_x$ um mindestens 1 vermindert wird.

Somit kann Anna für alle n mit Hilfe des beschriebenen *Spiegel*-Algorithmus einen Sieg erzwingen.

[1] Gemeint ist die $\frac{n+1}{2}$ -te Karte.

[2] Gemeint sind die $\frac{n}{2}$ -te und die $(\frac{n}{2}+1)$ -te Karte.

[3] *Spiegel*-Algorithmus deshalb, weil Anna jeden Zug von Beate an der Mitte der Kartenreihe *spiegelt*.

[4] Der Pfeil „$\leftarrow$“ in der Tabelle steht für „wird zu“.

[5] Die x-te Karte und die $(n+1-x)$-te Karte können nur dann nebeneinander liegen, wenn $x = (n+1-x) \pm 1$, also $(x = \frac{n}{2},\, n+1-x = \frac{n}{2}+1)$ oder $(n+1-x = \frac{n}{2},\, x = \frac{n}{2}+1)$. Wenn n ungerade ist, sind $\frac{n}{2}$ und $\frac{n}{2}+1$ keine ganzen Zahlen. Wenn n gerade ist, hat Anna im ersten Zug die $\frac{n}{2}$-te und die $(\frac{n}{2}+1)$-te Karte bereits aufgedeckt, d.h. diese beiden Karten sind nicht mehr verdeckt. Also können die x-te Karte und die $(n+1-x)$-te Karte nicht zwei nebeneinander liegende verdeckte Karten sein.