

Differentialgleichungen I: Existenz und Eindeutigkeit

Proseminar Analysis I (Prof. Pedit): Thema 2

Marcel Schmittfull, Dmitrij Sauermilch

17. April 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
1.1	Differentialgleichung (DGL) und Anfangswertproblem (AWP)	2
1.2	Prinzip der Lösungsapproximation durch Picard-Iterierte	3
1.3	Beispiele von AWP's und deren Lösung durch Picard-Iterierte	4
2	Der Satz von Picard-Lindelöf	8
2.1	Beweis	9
2.1.1	Schritt 1: Umformung in eine Integralgleichung .	9
2.1.2	Schritt 2: Die Funktionenfolge der Picard-Iterierten bleibt im Definitionsbereich von f	10
2.1.3	Schritt 3: Gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge gegen eine Grenzfunktion $\lambda(t)$	11
2.1.4	Schritt 4: Die Grenzfunktion $\lambda(t)$ ist Lösung des AWP	13
2.1.5	Schritt 5: Eindeutigkeit der Lösung	14
2.2	Anwendungsbeispiel: Riccati'sche Differentialgleichung	15
3	Anmerkungen und Erweiterungen zu Picard-Lindelöf	17
4	Literatur	18

1 Einführung

Bevor wir auf die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen eingehen, definieren wir allgemein die Begriffe Differentialgleichung (DGL), Anfangswertproblem (AWP) und Lösung einer DGL bzw. eines AWP.

1.1 Differentialgleichung (DGL) und Anfangswertproblem (AWP)

Def. Differentialgleichung: Eine n -dimensionale (gewöhnliche explizite) Differentialgleichung (DGL) k -ter Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$x^{(k)} = f\left(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(k-1)}\right) \quad (1)$$

mit Variablen $t \in \mathbb{R}$ und $x, \dot{x}, \dots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$. Dabei ist f eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^{1+kn}$ als Definitionsbereich.

Eine auf einem Intervall I k -mal differenzierbare Funktion $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Lösung der DGL (1), wenn für alle $t \in I$

$$\frac{d^k \lambda}{dt^k}(t) = f\left(t, \lambda(t), \frac{d\lambda}{dt}(t), \dots, \frac{d^{k-1} \lambda}{dt^{k-1}}(t)\right)$$

gilt und der Punkt $(t, \lambda(t), \frac{d\lambda}{dt}(t), \dots, \frac{d^{k-1} \lambda}{dt^{k-1}}(t))$ im Definitionsbereich D von f liegt. I nennt man das zur Lösung λ gehörige Existenzintervall.

Bemerkungen:

1. Beispiele für DGLs sind z.B.

- $\ddot{x} = -x$ (Schwingung z.B. einer Feder),
- $\dot{x} = \alpha x$ (radioaktiver Zerfall, Bakterienkulturen),
- $\ddot{x} = -t/2 \cdot \dot{x}$ (Wärmeleitungsgleichung für Spezialfälle),
- $\dot{x} = x^2 - t$ (Spezialform der Riccati'schen DGL, siehe 2.2).

DGLs haben eine außerordentlich große Bedeutung in unterschiedlichsten Gebieten (z.B. Physik, Biologie, Chemie, Soziologie).

2. Anschaulich ausgedrückt ist eine DGL eine Bedingungsgleichung für eine zu bestimmende Funktion $x(t)$: Der Wert $x^{(k)}(t)$ der k -ten Ableitung von x an der Stelle t hängt von der Stelle t und den Werten aller „kleineren“ Ableitungen an der Stelle t ab.
3. Jede DGL k -ter Ordnung lässt sich als System von k Differentialgleichungen 1. Ordnung schreiben (vgl. Thema 3: Lineare Systeme von Differentialgleichungen). Im Folgenden werden wir deshalb nur DGLs erster Ordnung betrachten.

Def. Anfangswertproblem: Ein Anfangswertproblem (1. Ordnung) ist eine DGL (1. Ordnung) mit der zusätzlichen Bedingung an die Lösung, dass Sie an einem Punkt $t_0 \in \mathbb{R}$ einen vorgegebenen Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ besitzt:

$$\underbrace{\dot{x}(t) = f(t, x)}_{\text{DGL}}, \quad \underbrace{x(t_0) = x_0}_{\text{Anfangswert}}.$$

Bemerkung: Während eine DGL oft eine ganze Schar von Lösungsfunktionen besitzt, wird in einem AWP oft nur noch eine dieser Lösungen durch die Anfangsbedingung zugelassen (bzw. die Menge der Lösungsfunktionen wird zumindest verkleinert).

1.2 Prinzip der Lösungsapproximation durch Picard-Iterierte

Schritt 1: Nach einer Messung hat man zunächst einen „Wulst“ von Daten, die man auf die Standardform

$$f(t, x) = \dot{x}(t), \quad x(t_0) = x_0$$

eines AWP bringen muss.

Schritt 2: Anschließend wird die DGL in eine Integralgleichung umgeformt, indem auf beiden Seiten der DGL von t_0 bis t integriert wird

$$\int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds = \int_{t_0}^t \dot{x}(s) ds = x(t) - \underbrace{x(t_0)}_{x_0}$$

$$\Leftrightarrow x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds = x(t). \quad (2)$$

Eine Funktion $\lambda(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist also genau dann Lösung des AWP aus Schritt 1, wenn sie die Integralgleichung (2) für alle $t \in I$ erfüllt und den Definitionsbereich von f nicht verlässt.

Schritt 3: Ausgehend von der Integralgleichung (2) definieren wir induktiv die *Picard-Iterierten*

$$\begin{aligned}\lambda_0(t) &:= x_0 \\ \lambda_{i+1}(t) &:= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \lambda_i(s)) ds, \quad i \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

also eine Funktionenfolge $(\lambda_i(t))_{i \in \mathbb{N}}$. Unter bestimmten Voraussetzungen (siehe Satz von Picard-Lindelöf) können wir ihre gleichmäßige Konvergenz für $i \rightarrow \infty$ gegen eine Grenzfunktion $\lambda(t)$ beweisen und zeigen, dass diese Grenzfunktion $\lambda(t)$ die Lösung der Integralgleichung und somit die Lösung der DGL bzw. des AWP ist

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i(t) =: \lambda(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \lambda(s)) ds.$$

1.3 Beispiele von AWP und deren Lösung durch Picard-Iterierte

Beispiel 1

Nun wollen wir an einem (einfachen) Beispiel anschaulich zeigen wie man durch Bildung der Picard-Iterierten die Lösung eines AWP approximieren kann. Als Beispiel diene das AWP

$$\dot{x} = f(t, x) = 3t^2, \quad x(t_0) = x_0. \quad (3)$$

Die i -te Picard-Iterierte lautet dann

$$\begin{aligned}\lambda_i(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \lambda_{i-1}(s)) ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t 3s^2 ds = x_0 + [s^3]_{t_0}^t \\ &= x_0 + t^3 - t_0^3 =: \lambda(t).\end{aligned}$$

Die Folge der Picard-Iterierten $(\lambda_i(t))_{i \in \mathbb{N}} = (\lambda(t))_{i \in \mathbb{N}}$ ist also eine konstante Funktionenfolge. $\lambda(t)$ ist als Grenzwert dieser konstanten Funktionenfolge die Lösungsfunktion des AWP (3), wie man durch Ableiten leicht nachprüft.

In diesem Fall ist es selbstverständlich, dass die Folge der Picard-Iterierten konvergiert und die Grenzfunktion das AWP löst, da sie die Integralgleichung löst. Im allgemeinen Fall ist jedoch die Konvergenz der Folge der Picard-Iterierten gegen eine Lösung nur unter bestimmten Voraussetzungen an f gegeben, die im Satz von Picard-Lindelöf im nächsten Abschnitt beschrieben werden. Zunächst folgen noch zwei Beispiele.

Beispiel 2

Ein ähnliches Beispiel ist das AWP

$$\dot{x} = f(t, x) = \ln(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (4)$$

Hier folgt für die i -te Picard-Iterierte

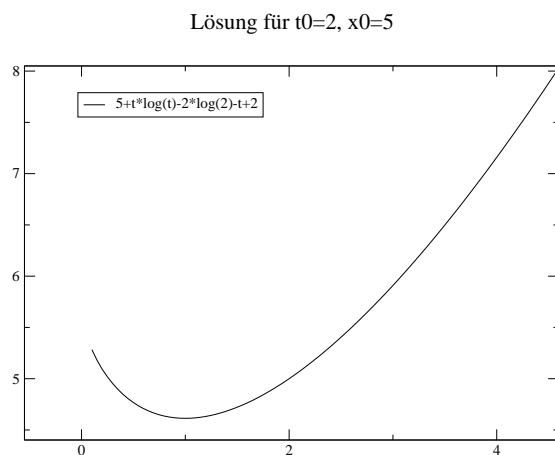


Abbildung 1: Lösung $\lambda(t)$ des AWP (4) aus Beispiel 2 für $t_0 = 2, x_0 = 5$.

$$\begin{aligned} \lambda_i(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \lambda_{i-1}(s)) ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t \ln s ds \\ &= x_0 + [s \ln s]_{t_0}^t - \int_{t_0}^t s \cdot \frac{1}{s} ds \\ &= x_0 + t \ln t - t_0 \ln t_0 - t + t_0 =: \lambda(t). \end{aligned}$$

Die Folge der Picard-Iterierten $(\lambda_i(t))_{i \in \mathbb{N}} = (\lambda(t))_{i \in \mathbb{N}}$ ist also wieder eine konstante Funktionenfolge. $\lambda(t)$ ist als Grenzwert dieser konstanten Funktionenfolge die Lösungsfunktion des AWP (4).

Wir sehen also: Wenn f nur von t abhängt, ist die Folge der Picard-Iterierten eine konstante Funktionenfolge, die gegen die Lösung „konvergiert“. Der Grund dafür ist, dass wir durch Berechnung der Picard-Iterierten eigentlich direkt die Integralgleichung der jeweiligen DGL gelöst haben, denn

$$f(t, \lambda_i(t)) = f(t, \lambda_{i-1}(t)) \Rightarrow x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^t f(s, \lambda_i(s)) ds}_{\lambda_{i+1}(t)} = x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^t f(s, \lambda_{i-1}(s)) ds}_{\lambda_i(t)}.$$

Beispiel 3

Nun ein Beispiel, in dem f von x abhängt und daher die Folge der Picard-Iterierten nicht konstant ist. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir das AWP

$$\dot{x} = f(t, x) = \alpha x, \quad x(t_0) = x_0. \quad (5)$$

Für die Picard-Iterierten gilt dann:

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= x_0 \\ \lambda_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t \alpha x_0 ds = x_0 + \alpha x_0 \int_{t_0}^t ds = x_0 (1 + \alpha(t - t_0)) \\ \lambda_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t \alpha \cdot x_0 (1 + \alpha(s - t_0)) ds \\ &= x_0 + \alpha x_0 \left[s + \frac{\alpha}{2} (s - t_0)^2 \right]_{t_0}^t \\ &= x_0 + \alpha x_0 (t - t_0) + \frac{\alpha^2 x_0}{2} (t - t_0)^2 \\ &= x_0 \left(1 + \alpha(t - t_0) + \frac{\alpha^2 (t - t_0)^2}{2} \right) \\ \lambda_3(t) &= \dots = x_0 \left(1 + \alpha(t - t_0) + \frac{\alpha^2 (t - t_0)^2}{2} + \frac{\alpha^3 (t - t_0)^3}{2 \cdot 3} \right) \\ &\vdots \\ \lambda_i(t) &= x_0 \cdot \sum_{j=0}^i \frac{\alpha^j (t - t_0)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Also konvergiert die Folge der Picard-Iterierten für $i \rightarrow \infty$ gegen die Grenzfunktion

$$\lambda(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)},$$

die bekannterweise Lösung des AWP (5) ist (vgl. Abbildung).

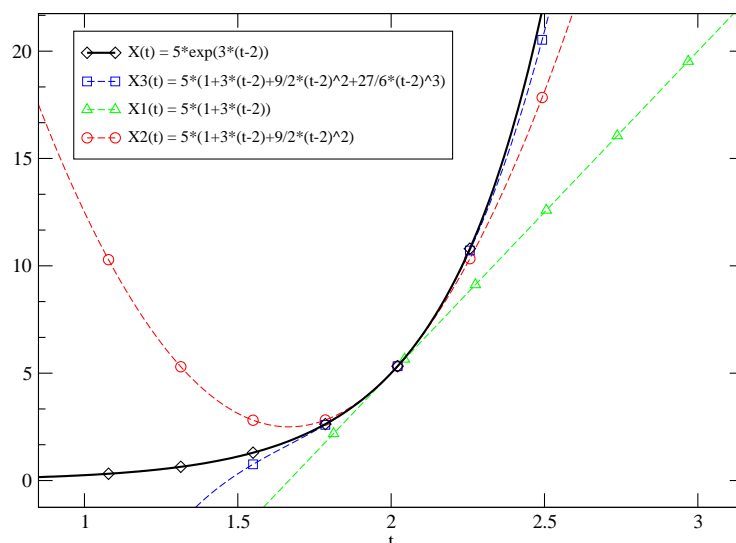


Abbildung 2: Lösungsfunktion $\lambda(t)$ des AWP (5) aus Beispiel 3 für $\alpha = 3$, $t_0 = 2$, $x_0 = 5$ sowie Picard-Iterierte $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$.

Beispiel 4

Zuletzt zeigen wir noch ein Beispiel eines AWP, das keine Lösung besitzt:

$$\dot{x} = f(t, x) = \operatorname{sgn} x, \quad x(0) = 0, \quad (6)$$

wobei sgn die in 0 unstetige Signumfunktion ist. Wegen der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ liegt die 0 im Definitionsintervall einer möglichen Lösung. Für $x < 0$ ist die Ableitung der Lösung -1 , für $x > 0$ ist die Ableitung $+1$. D.h. aber, dass die Lösung bei 0 nicht differenzierbar ist. Eine Lösung muss aber differenzierbar sein. Also gibt es zu dem AWP (6) keine Lösung.

Nach diesen einführenden Beispielen und Definitionen kommen wir nun zu einem wichtigen Satz über die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung eines gegebenen AWP.

2 Der Satz von Picard-Lindelöf

Gegeben sei ein Anfangswertproblem (AWP) der Form

$$\underbrace{\dot{x}(t) = f(t, x)}_{DGL}, \quad \underbrace{x(t_0) = x_0}_{\text{Anfangswert}}, \quad (t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n), \quad (7)$$

wobei f eine stetige Funktion $f : Z_{a,r}^n(t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist mit dem Definitionsbereich

$$Z_{a,r}^n(t_0, x_0) := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq r\} = I_a(t_0) \times K_r^n(x_0),$$

wobei $I_a := \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq a\} = [t_0 - a, t_0 + a]$ das Intervall um t_0 der Breite $2a$ ist, und $K_r^n(x_0) := \{x(t) \in \mathbb{R}^n : \|x(t) - x_0\| \leq r\}$. Zudem habe die Funktion f die Eigenschaft, dass es eine Konstante $L > 0$ gibt mit

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \quad \text{für alle } (t, x), (t, y) \in Z_{a,r}^n(t_0, x_0). \quad (8)$$

Dann existiert eine eindeutige Lösung $\lambda(t) \in C^1([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n)$ des AWP (7) auf dem Existenzintervall $I_\alpha(t_0) = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, wobei

$$\alpha := \min \left\{ a, \frac{r}{M} \right\}, \quad M := \max \{ \|f(t, x)\| : (t, x) \in Z_{a,r}^n(t_0, x_0) \}.$$

Im Fall $M = 0$ ist dabei $r/M = \infty$ zu setzen.

Bemerkungen:

1. In Gleichung (7) ist $x(t)$ eine Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, d.h. x ordnet einer reellen Zahl t einen Vektor des \mathbb{R}^n zu. Schreibt man $x(t)$ in Komponenten $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, so wird aus (7) ein System von n DGLs erster Ordnung. Dies entspricht einer DGL n -ter Ordnung (vgl. Thema 3).
2. Im Falle der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ hat der Definitionsbereich $Z_{a,r}^n(t_0, x_0)$ von f die Form eines n -dimensionalen Zylinders der Höhe $2a$ und der n -dimensionalen „Grundkugel“ $K_r^n(x_0)$ mit Radius r und Mittelpunkt x_0 .

3. Man sagt zu Bedingung (8) auch f ist global *Lipschitz-stetig bzgl.* x mit der Lipschitz-Konstanten L . Anschaulich bedeutet diese Eigenschaft, dass die Steigung von $f(x)$ beschränkt ist.
4. λ ist Lösung des AWP heißt, dass λ (7) erfüllt und $(t, \lambda(t))$ stets im Definitionsbereich von f , also in $Z_{a,r}^n(t_0, x_0)$ liegt. Anschaulich bedeutet die Existenz einer eindeutigen Lösung, dass durch jeden Punkt des Zylinders eine Lösungsfunktion verläuft und der gesamte Zylinder von Lösungsfunktionen ausgefüllt ist, die sich gegenseitig nicht schneiden.

2.1 Beweis

Der Beweis ist in fünf Schritte unterteilt. In den ersten vier Schritten wird die Existenz der Lösung gezeigt, im fünften Schritt die Eindeutigkeit dieser Lösung.

2.1.1 Schritt 1: Umformung in eine Integralgleichung

Zunächst schreiben wir die DGL in (7) als Integralgleichung, indem wir die DGL von t_0 bis t integrieren (vgl. Einführung):

$$\int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds = \int_{t_0}^t \dot{x}(s) ds = x(t) - \underbrace{x(t_0)}_{x_0}$$

$$\Leftrightarrow x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds = x(t). \quad (9)$$

Eine Funktion $\lambda(t) : I_\alpha(t_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist also genau dann Lösung des AWP (7), wenn sie stetig ist, die Kugel $K_r^n(x_0)$ nicht verlässt (d.h. $\lambda(t) \in K_r^n(x_0)$) und Gleichung (9) für alle $t \in I_\alpha(t_0)$ erfüllt.

Beweisidee

Wir nähern die Lösung $\lambda(t)$ immer besser an durch geeignete Funktionen $\lambda_i(t)$, die *Picard-Iterierten* (vgl. Ähnlichkeit zur Integralgleichung (9))

$$\lambda_0(t) := x_0$$

$$\lambda_{i+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \lambda_i(s)) ds, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Wir sind fertig, wenn wir a) zeigen können, dass die so definierte Funktionenfolge $(\lambda_i(t))_{i \in \mathbb{N}}$ gegen eine stetige Grenzfunktion $\lambda(t)$ konvergiert (die $K_r^n(x_0)$ nicht verlässt) und dass b) in Gleichung (10) für die Grenzfunktion $\lambda(t)$ Integration und Grenzwertbildung vertauschbar sind, denn dann gilt

$$\underbrace{\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{i+1}(t)}_{=: \lambda(t)} = x_0 + \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, \lambda_i(s)) ds = x_0 + \int_{t_0}^t \underbrace{\lim_{i \rightarrow \infty} f(s, \lambda_i(s))}_{f(s, \lambda(s))} ds,$$

d.h. die Integralgleichung (9) ist erfüllt, was äquivalent dazu ist, dass $\lambda(t)$ das AWP (7) löst. Die Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwertbildung in b) ist erlaubt, wenn die Funktionenfolge $(f(\lambda_i(t)))_{i \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.¹ Aus der globalen Lipschitz-Stetigkeit folgt, dass $(f(\lambda_i(t)))_{i \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert, falls $(\lambda_i(t))_{i \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.

Wir betrachten also die Funktionenfolge $(\lambda_i(t))$ der Picard-Iterierten und zeigen, dass diese gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion $\lambda(t)$ konvergiert. Dann sind wir fertig!

2.1.2 Schritt 2: Die Funktionenfolge der Picard-Iterierten bleibt im Definitionsbereich von f

Die Funktionenfolge $(\lambda_i(t))_{i \in \mathbb{N}}$ der Picard-Iterierten ist für alle $t \in I_\alpha(t_0)$ durch (10) iterativ definiert. Da in jeder Iteration f auf Punkte $(s, \lambda_i(s))$ bzw. $(t, \lambda_i(t))$ angewendet wird, müssen wir zuerst zeigen, dass $(t, \lambda_i(t))$ für alle $t \in I_\alpha(t_0)$ stets im Definitionsbereich $Z_{a,r}^n(t_0, x_0)$ von f liegt. Da $t \in I_\alpha(t_0) = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subseteq [t_0 - a, t_0 + a]$, genügt es zu zeigen, dass für alle $t \in I_\alpha(t_0)$ die Picard-Iterierte $(\lambda_i(t))_{i \in \mathbb{N}}$ die Kugel $K_r^n(x_0)$ nicht verlässt, d.h. dass für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\lambda_i(t) \in K_r^n(x_0) \quad \text{für } |t - t_0| \leq \alpha \leq a \quad (11)$$

gilt.

Sei im Folgenden $t \in I_\alpha(t_0)$ beliebig (d.h. $|t - t_0| \leq \alpha \leq a$). Wegen $\lambda_0(t) = x_0$ ist offensichtlich $\lambda_0(t) \in K_r^n(x_0)$ (Induktionsanfang). Gelte $\lambda_i(t) \in K_r^n(x_0)$ für ein beliebiges $i \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Dann

¹Siehe Analysis I, Kapitel über Differentiation und Integration von Funktionenfolgen.

folgt für $i + 1$ (Induktionsschluss)

$$\begin{aligned} \|\lambda_{i+1}(t) - x_0\| &\stackrel{(10)}{=} \left\| \int_{t_0}^t f(s, \lambda_i(s)) ds \right\| \stackrel{(12)}{\leq} \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \lambda_i(s))\| ds \right| \\ &\stackrel{\text{Def. } M}{\leq} \left| \int_{t_0}^t M ds \right| = M \underbrace{|t - t_0|}_{\leq \alpha} \stackrel{\text{Def. } \alpha}{\leq} r, \end{aligned}$$

d.h. $\lambda_{i+1}(t) \in K_r^n(x_0)$. Also verlässt die Funktionenfolge $(\lambda_i(t))_{i \in \mathbb{N}}$ die Kugel nicht. Somit liegt der Punkt $(t, \lambda_i(t))$ für alle $t \in I_\alpha(t_0)$ in $Z_{a,r}^n(t_0, x_0)$, dem Definitionsbereich von f .

Im Induktionsschluss wurde verwendet, dass die Norm über ein Integral kleiner-gleich dem Integral über die Norm ist:

$$\left\| \int_a^b g(s) ds \right\| \leq \int_a^b \|g(s)\| ds \quad \text{für } a \leq b, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (12)$$

Dies folgt unmittelbar aus der analogen Abschätzung für Beträge in \mathbb{R} , wenn man als Norm die Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ verwendet. Für $a > b$ muss man auf der rechten Seite den Betrag des Integrals bilden, damit die Abschätzung richtig bleibt.

2.1.3 Schritt 3: Gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge gegen eine Grenzfunktion $\lambda(t)$

Nun zeigen wir, dass die Funktionenfolge $(\lambda_i(t))_{i \in \mathbb{N}}$ auf dem Intervall $I_\alpha(t_0)$ gleichmäßig konvergiert. Sei also im Folgenden wieder $t \in I_\alpha(t_0)$ beliebig. Zunächst schreiben wir $\lambda_i(t)$ als i -te Partialsumme einer unendlichen Funktionenreihe $x_0 + \sum g_k(t)$:

$$\begin{aligned} \lambda_i(t) &= \left[\lambda_0 + \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_0)}_{g_1} + \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{g_2} + \cdots + \underbrace{(\lambda_i - \lambda_{i-1})}_{g_i} \right](t) \\ &= x_0 + \sum_{k=1}^i (\lambda_k(t) - \lambda_{k-1}(t)) =: x_0 + \sum_{k=1}^i g_k(t) \end{aligned} \quad (13)$$

Dann erinnern wir uns an den Weierstraß-Test aus Analysis I: Wenn jeder Summand $g_k(t)$ einer Funktionenreihe $\sum g_k(t)$ betragsmäßig² kleiner-gleich seinem entsprechenden Summanden m_k einer konvergenten Reihe

²Der Test funktioniert auch mit der Norm an Stelle des Betrags.

Σm_k ist (d.h. $\|g_k(t)\| \leq m_k \forall k, t$ und Σm_k konvergent), dann konvergiert die Funktionenreihe gleichmäßig. Wenn wir den Weierstraß-Test also auf die durch (13) definierte Reihe $x_0 + \Sigma g_k(t)$ anwenden können, dann konvergiert diese Reihe gleichmäßig. Das bedeutet die Folge der Partialsummen der Reihe konvergiert gleichmäßig (Definition Reihenkonvergenz), und das wiederum heißt die Funktionenfolge $(\lambda_i(t))_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig, denn $\lambda_i(t)$ ist ja die i -te Partialsumme der Reihe. Wenden wir den Weierstraß-Test also auf die Reihe $x_0 + \Sigma g_k(t)$ an.

Hierzu schätzen wir jeden Summanden der Funktionenreihe durch

$$\underbrace{\|\lambda_k(t) - \lambda_{k-1}(t)\|}_{\|g_k(t)\|} \stackrel{!}{\leq} ML^{k-1} \frac{|t-t_0|^k}{k!} \leq ML^{k-1} \frac{\alpha^k}{k!} = \underbrace{\frac{M}{L} \frac{L^k \alpha^k}{k!}}_{=: m_k} \quad (14)$$

ab (noch zu beweisen). Man sieht unmittelbar, dass dann die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k = \frac{M}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(L\alpha)^k}{k!} = \frac{M}{L} (e^{L\alpha} - 1)$$

konvergiert und somit der Weierstraß-Test anwendbar ist. Während die zweite Abschätzung in (14) unmittelbar aus $|t-t_0| \leq \alpha$ folgt, muss die erste Abschätzung

$$\|\lambda_k(t) - \lambda_{k-1}(t)\| \leq ML^{k-1} \frac{|t-t_0|^k}{k!} \quad (15)$$

mittels vollständiger Induktion gezeigt werden. Für $k=1$ gilt

$$\|\lambda_1(t) - \lambda_0(t)\| \stackrel{(10)}{=} \left\| \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds \right\| \stackrel{\text{s.o.}}{\leq} \left| \int_{t_0}^t M ds \right| = M |t-t_0|,$$

d.h. Abschätzung (15) gilt für $k=1$. Gelte (15) für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt für $k+1$, wenn wir Gleichung (10) für $k+1$ und k bilden und

die beiden entstehenden Gleichungen voneinander subtrahieren:

$$\begin{aligned}
\|\lambda_{k+1}(t) - \lambda_k(t)\| &\stackrel{(10)}{=} \left\| \int_{t_0}^t [f(s, \lambda_k(s)) - f(s, \lambda_{k-1}(s))] ds \right\| \\
&\stackrel{(12)}{\leq} \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \lambda_k(s)) - f(s, \lambda_{k-1}(s))\| ds \right| \\
&\stackrel{(8)}{\leq} \left| \int_{t_0}^t L \|\lambda_k(s) - \lambda_{k-1}(s)\| ds \right| \\
&\stackrel{(15)}{\leq} \left| \int_{t_0}^t L \cdot ML^{k-1} \frac{|s-t_0|^k}{k!} ds \right| = \frac{ML^k}{k!} \left| \int_{t_0}^t |s-t_0|^k ds \right| = \\
&= \frac{ML^k}{k!} \frac{|t-t_0|^{k+1}}{k+1} = ML^k \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!},
\end{aligned}$$

d.h. Abschätzung (15) gilt für $k+1$ und somit für alle $k \in \mathbb{N}$, womit auch Abschätzung (14) gezeigt ist.

Also darf der Weierstraß-Test auf Reihe (13) von oben angewendet werden, woraus folgt, dass die Folge der Picard-Iterierten $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ auf $I_\alpha(t_0)$ gleichmäßig konvergiert (vgl. oben). Nennen wir die Grenzfunktion gegen die $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert $\lambda(t)$. Dann ist diese Grenzfunktion $\lambda(t)$ stetig, da gleichmäßige Konvergenz Stetigkeit erhält³ und die Funktionen λ_i als Integrale der stetigen Funktion f (vgl. Definition der Picard-Iterierten (10)) stetig sind.

2.1.4 Schritt 4: Die Grenzfunktion $\lambda(t)$ ist Lösung des AWP

Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass unsere Grenzfunktion $\lambda(t)$ Lösung des AWP ist bzw. die Integralgleichung (9) erfüllt. Wie in der Beweisidee bereits erwähnt, muss hierzu die Integration mit der Grenzwertbildung auf der rechten Seite der Iterationsgleichung (10) vertauschbar sein:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, \lambda_i(s)) ds \stackrel{!}{=} \int_{t_0}^t \lim_{i \rightarrow \infty} f(s, \lambda_i(s)) ds. \quad (16)$$

Diese Vertauschbarkeit ist erlaubt, wenn die Folge

$$(f(s, \lambda_i(s)))_{i \in \mathbb{N}} \quad (17)$$

³Genau deshalb wurde die gleichmäßige Konvergenz in Analysis I eingeführt.

der Integranden gleichmäßig konvergent ist. Auf Grund der Lipschitz-Stetigkeit von f bezüglich x gilt für alle $s \in I_\alpha(t_0)$

$$\|f(s, \lambda_i(s)) - f(s, \lambda(s))\| \leq L \|\lambda_i(s) - \lambda(s)\| \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty,$$

d.h. die Folge (17) ist wie die Folge $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent. Also sind Integration und Grenzwertbildung vertauschbar, d.h. $\lambda(t)$ ist Lösung des AWP (7).

2.1.5 Schritt 5: Eindeutigkeit der Lösung

Zuletzt gilt es noch zu beweisen, dass die gefundene Lösung $\lambda(t)$ eindeutig ist. Hierzu nehmen wir an, neben $\lambda(t)$ gäbe es eine von $\lambda(t)$ verschiedene Lösung $\mu(t)$ des AWP (7) auf $I_\alpha(t_0)$. Sei also ein letztes Mal $t \in I_\alpha(t_0)$. Mit vollständiger Induktion beweisen wir die Abschätzung

$$\|\mu(t) - \lambda_{i-1}(t)\| \leq ML^{i-1} \frac{|t - t_0|^i}{i!} = \frac{M}{L} \frac{L^i |t - t_0|^i}{i!} \quad (18)$$

weil dann die Folge $((M/L) \cdot L^i |t - t_0|^i / i!)_{i \in \mathbb{N}}$ als Folge der Summanden der konvergierenden Exponentialreihe eine Nullfolge bildet und somit $\|\mu(t) - \lambda_{i-1}(t)\| \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$ gilt.

Da Abschätzung (18) mit der Abschätzung (14) aus Schritt drei übereinstimmt, wenn man λ_i durch μ ersetzt, ist der Beweis von (18) dem Beweis von (14) sehr ähnlich (statt der Iterationsgleichung (10) für λ_i verwendet man die Integralgleichung (9) für μ , da μ als Lösung des AWP (9) erfüllt):

Für den Induktionsanfang $i = 1$ gilt wegen $\lambda_0(t) := x_0$

$$\|\mu(t) - \lambda_0(t)\| \stackrel{(9)}{=} \left\| \int_{t_0}^t f(s, \mu(s)) ds \right\| \stackrel{(12)}{\leq} \left| \int_{t_0}^t M ds \right| = M |t - t_0|.$$

Gelte nun Abschätzung (18) für $i \in \mathbb{N}$ (Induktionsannahme). Dann gilt

für $i + 1$ (vgl. Rechnung in Schritt drei)

$$\begin{aligned}
 \|\mu(t) - \lambda_i(t)\| &\stackrel{(10), (9)}{=} \left\| \int_{t_0}^t [f(s, \mu(s)) - f(s, \lambda_{i-1}(s))] ds \right\| \\
 &\stackrel{(12)}{\leq} \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \mu(s)) - f(s, \lambda_{i-1}(s))\| ds \right| \\
 &\stackrel{(8)}{\leq} \left| \int_{t_0}^t L \|\mu(s) - \lambda_{i-1}(s)\| ds \right| \\
 &\stackrel{(18)}{\leq} \left| \int_{t_0}^t L \cdot ML^{i-1} \frac{|s-t_0|^i}{i!} ds \right| = \frac{ML^i}{i!} \left| \int_{t_0}^t |s-t_0|^i ds \right| = \\
 &= \frac{ML^i}{i!} \frac{|t-t_0|^{i+1}}{i+1} = ML^i \frac{|t-t_0|^{i+1}}{(i+1)!},
 \end{aligned}$$

womit (18) bewiesen ist.

Also gilt

$$\|\mu(t) - \lambda(t)\| = \lim_{i \rightarrow \infty} \|\mu(t) - \lambda_{i-1}(t)\| \rightarrow 0,$$

d.h. λ und μ sind identisch, was im Widerspruch zur Annahme steht. Die Lösung λ ist also eindeutig.

2.2 Anwendungsbeispiel: Riccati'sche Differentialgleichung

Die allgemeine Riccati'sche Differentialgleichung hat die Form

$$\dot{x} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2.$$

Ihre Lösungen hängen mit den sog. Bessel-Funktionen zusammen.⁴ Wir wollen hier einen einfachen Spezialfall als Anwendungsbeispiel für den Satz von Picard-Lindelöf betrachten, nämlich ein AWP der Form ($a(t) = -t$, $b(t) = 0$, $c(t) = 1$)

$$\dot{x} = f(t, x) = x^2 - t, \quad x(0) = 0, \quad f : Z_{2,5}^1(0, 0) \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad (19)$$

wobei

⁴Die Bessel-Funktionen finden u.a. Anwendung bei der „Untersuchung von Eigenschwingungen einer kreisförmigen Membran oder Orgelpfeife, Ausbreitung von Wasserwellen in runden Behältern, Wärmeleitung in Stäben, der Analyse des Frequenzspektrums von frequenzmodulierten Signalen, stationären Zuständen von Kastenpotentialen und der Intensität von Lichtbeugung an kreisförmigen Löchern“ (Wikipedia).

$$Z_{2,5}^1(0,0) := \underbrace{[-2, 2]}_{I_2(0)} \times \underbrace{[-5, 5]}_{K_5^1(0)}.$$

f ist offenbar stetig. Zudem genügt f einer globalen Lipschitz-Bedingung: Seien $(t,x), (t,y) \in Z_{2,5}^1(0,0)$, d.h. $t \in I_2(0)$ und $x,y \in K_5^1(0)$. Dann gilt $|x| \leq 5$, $|y| \leq 5$ und daher

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= |x^2 - t - y^2 + t| = |(x+y)(x-y)| = |x+y| |x-y| \\ &\leq (|x| + |y|) \cdot |x-y| \leq (5+5) \cdot |x-y| = 10 \cdot |x-y|, \end{aligned}$$

d.h. f ist Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten $L = 10$. Also besitzt das AWP (19) eine eindeutige Lösung $\lambda(t)$, deren Definitionsintervall $[-\alpha, \alpha]$ es noch zu bestimmen gilt. Der Wert von $|f(t,x)| = |x^2 - t|$ ist im Punkt $(-2, 5)$ maximal (minimales t , maximales x^2), d.h.

$$M = \max_{(t,x) \in Z} |f(t,x)| = f(-2, 5) = 5^2 - (-2) = 27.$$

Also gilt

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{r}{M} \right\} = \min \left\{ 2, \frac{5}{27} \right\} = \frac{5}{27}$$

d.h. die Lösung $\lambda(t)$ ist auf dem Intervall $[-5/27, 5/27]$ definiert. Bildet man die Folge der Picard-Iterierten, so konvergiert diese auf dem Intervall $[-5/27, 5/27]$ gegen die Lösung des AWP (vgl. Abbildung).

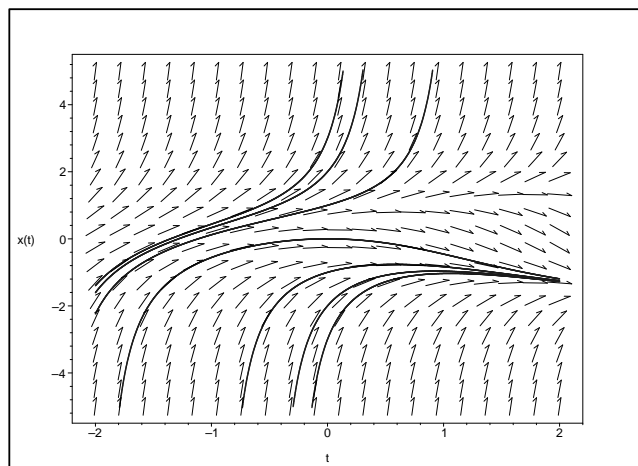


Abbildung 3: Vereinfachte Riccati-DGL (19) mit Anfangsbedingungen $x(0) \in \{3, 2, 1, 0, -1, -2, -3\}$.

3 Anmerkungen und Erweiterungen zu Picard-Lindelöf

- *Lokale* Lipschitz-Stetigkeit von f genügt als Voraussetzung (d.h. für jeden Punkt des Definitionsbereichs von f existiert eine Umgebung um diesen Punkt, so dass f in dieser Umgebung Lipschitz-stetig ist),
- f stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow f$ Lipschitz-stetig,
- der Definitionsbereich von f muss nicht ein Zylinder sein, sondern kann eine beliebige offene Menge sein (für jeden Punkt in dieser offenen Menge findet man dann eine Zylinderumgebung um diesen Punkt, die ganz in der offenen Menge liegt),
- aus dem Beweis folgt eine Fehlerabschätzung für die Picard-Iterierte gegenüber der Lösung:

$$\|\lambda_{i-1}(t) - \lambda(t)\| \leq \frac{M}{L} \frac{L^i \alpha^i}{i!}$$

- der Beweis von Picard-Lindelöf kann mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes etwas abgekürzt werden (vgl. Integralgleichung, Lösung ist Fixpunkt), aber noch nicht in Analysis 1 behandelt,
- die Lösung kann zu einer maximalen Lösung (d.h. Lösung mit maximalem Definitionsbereich) fortgesetzt werden (*globaler Existenz- und Eindeigkeitssatz*), wobei dann Aussagen über das Randverhalten der Lösung möglich sind,
- wenn f nur stetig ist, existiert eine Lösung, die aber nicht notwendigerweise eindeutig ist (*Satz von Peano*).

4 Literatur

- Aulbach, Bernd: Gewöhnliche Differenzialgleichungen
- Forster, Otto: Analysis 2
- Heuser, Harro: Gewöhnliche Differentialgleichungen
- Hildebrandt, Stefan: Analysis 1